

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR  
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID



DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS  
Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS

# ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE LAMINADOS DE MATRIZ POLIMÉRICA CON FISURACIÓN INTRALAMINAR EN CONDICIONES DE MEMBRANA O DE FLEXIÓN PURA

Ingeniería Industrial

Proyecto Final de Carrera

---

Autor:

Javier Cabrera Barbero

Dirigido por:

Carlos Navarro Ugena (Universidad Carlos III de Madrid, Tutor)

Ever J. Barbero (West Virginia University, Co-director)



# Agradecimientos

*Me gustaría expresar de la manera más humilde y honesta posible lo que ha significado realizar este proyecto final de carrera para mí.*

*En primer lugar, agradecer al Dr. Carlos Navarro por haberme brindado la confianza y la oportunidad de trabajar con personal docente de gran prestigio académico e internacional. Me gustaría agradecer también a todos los profesores que nos han ayudado durante todos estos años de carrera universitaria.*

*En segundo lugar, agradecer al Dr. Ever Barbero todo el ánimo, apoyo y entusiasmo mostrado durante todo este tiempo. Gracias a él he compartido una experiencia inolvidable y vivencias únicas en mi vida. Agradecer de la misma manera a su familia por haberme acogido como uno más.*

*Por último, no me puedo olvidar de todas aquellas personas que están ahí día tras día apoyándome y animando a ser mejor persona, pues sin ellos esto no hubiera sido posible. Este proyecto va dedicado a mi familia y a mis compañeros.*

*Gracias*



# Abstract

When we design a composite material, whatever the application, it must be considered all the possible damage that it is exposed. One of the most common mechanism is the formation of cracks inside. These damage mechanisms degrade their mechanical properties and sometimes resulting in loss of integrity or uselessness of material for which it was designed.

Some analytical models as of today, are able to predict the degradation of the material but they present many limitations: they are only good for certain configurations or they have problems of convergence when we have to iterate lamina to lamina within the laminate for a crack density, other models present numerical problems or provide approximate analytical solutions in serial form, others model are limited to a previous finite element parametric study, in others it is impossible to calculate accurately the maximum interlaminar stresses that favor delamination, there is not an exact solution that shows the real behavior and normally, the approximations used eliminate valuable information.

This work presents analytical models for composites of polymer matrix with intralaminar cracking that are able to predict these mechanical properties but improving certain aspects mentioned above. For this, it has been developed two uni-dimensional analytical models (beam theory) for two different charge states, bending and membrane loads. These models present an analytical, closed and exact solution providing the real physical behavior, they get detailed results of intralaminar stresses and calculate the ineffective length for which these stresses are negligible, we predict more accurately the interlaminar stresses that favor delamination, they solve computational problems and facilitate the convergence lamina to lamina for a crack density, also they can be used as benchmark points for approximate or numerical models although they are in a state of plane stress.



# Resumen

Cuando diseñamos un material compuesto, sea cual sea la aplicación, se debe tener en cuenta todos los posibles daños a los que puede estar expuesto. Uno de los mecanismos más comunes son la formación de fisuras intralaminas en el interior de la matriz polimérica. Estos mecanismos de daño, degradan sus propiedades mecánicas ocasionando a veces la pérdida de integridad estructural o inutilidad del material para el cual fue diseñado.

Algunos modelos analíticos existentes a día de hoy son capaces de predecir la degradación del material pero presentan muchas limitaciones. Por ejemplo, muchos modelos solo son válidos para ciertas configuraciones o tienen problemas de convergencia al iterar lámina a lámina para calcular la densidad de fisuras existente en el laminado. Otros modelos presentan problemas numéricos o la solución analítica que proponen es aproximada en forma de serie. En otros casos, los modelos están limitados a un estudio paramétrico previo por elementos finitos y en la gran mayoría, es imposible calcular de forma exacta las máximas tensiones interlaminas que favorecen la deslaminación. Además, no hay una solución exacta que rijas el comportamiento físico real del problema o se utilizan aproximaciones que eliminan una información valiosa.

En este trabajo se presentan modelos analíticos para laminados de matriz polimérica con fisuración intralaminar capaces de predecir dichas propiedades mecánicas pero mejorando las limitaciones anteriormente mencionadas. Para ello, se desarrollan dos modelos analíticos unidimensionales (teoría de vigas) para dos estados de carga distintos, membranal y flexión pura. Estos modelos presentan una solución analítica, cerrada y exacta que muestran el comportamiento físico del problema y proporcionan resultados detallados de las tensiones intralaminas en el interior del laminado. Con dichos modelos seremos capaces de calcular con gran exactitud las tensiones interlaminas máximas que favorecen la deslaminación, resolviendo problemas numéricos que facilitarán la convergencia iterativa entre láminas para el cálculo de la densidad de fisuras. Por último, estos modelos servirán como puntos de referencia para modelos numéricos o aproximados aunque sea en un estado de tensión plana.





# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>17</b>
1.1. Objetivos . . . . .	19
1.2. Estructura del proyecto . . . . .	20
1.3. Revisión de la literatura . . . . .	21
<b>2. Base teórica</b>	<b>25</b>
2.1. Modelización mecánica . . . . .	25
2.2. Mecánica del daño discreto y continuo . . . . .	28
2.3. Idealización . . . . .	31
<b>3. Solución analítica en laminados con fisuras en la matriz. Cargas membranales</b>	<b>33</b>
3.1. Solución analítica unidimensional: tensión y deformación plana . . . . .	34
3.2. Aproximaciones . . . . .	36
3.2.1. Mecánica de la fractura . . . . .	36
3.2.2. Cinemática de placas . . . . .	38
3.3. Ecuaciones constitutivas . . . . .	41
3.4. Tensiones de cortadura fuera del plano . . . . .	45
3.5. Equilibrio . . . . .	56
3.5.1. Solución del sistema de ecuaciones diferenciales . . . . .	60
3.5.2. Condiciones de contorno . . . . .	63
3.6. Degradación de rigidez del laminado . . . . .	66
3.7. Constante de dilatación térmica (CTE) del laminado . . . . .	67
<b>4. Solución analítica en laminados con fisuras en la matriz. Flexión pura</b>	<b>69</b>
4.1. Aproximaciones . . . . .	70
4.1.1. Mecánica de la fractura . . . . .	71
4.1.2. Cinemática de placas . . . . .	72
4.2. Ecuaciones constitutivas . . . . .	74

4.3. Tensiones de cortadura fuera del plano . . . . .	79
4.4. Equilibrio . . . . .	87
4.4.1. Solución al sistema de ecuaciones diferenciales . . . . .	88
4.4.2. Condiciones de contorno . . . . .	91
4.5. Degradación de rigidez del laminado . . . . .	95
4.6. Constante de dilatación térmica (CTE*) del laminado . . . . .	95
<b>5. Discusión de los resultados</b>	<b>99</b>
5.1. Resultados en laminados poliméricos en condiciones de membrana . . . . .	99
5.1.1. Análisis de la rigidez y CTE. . . . .	101
5.1.2. Tensiones intralaminares. . . . .	107
5.1.3. Campo de desplazamientos . . . . .	112
5.1.4. Número de condición . . . . .	113
5.2. Resultados en laminados poliméricos en condiciones de flexión pura . . . . .	115
5.2.1. Análisis de la rigidez y CTE . . . . .	116
5.2.2. Tensiones intralaminares . . . . .	121
5.2.3. Campo de desplazamientos . . . . .	125
5.2.4. Número de condición . . . . .	127
<b>6. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>129</b>
6.1. Modelo analítico sometido a cargas membranales . . . . .	129
6.2. Modelo analítico sometido a flexión pura . . . . .	130
6.3. Trabajos futuros . . . . .	131
<b>Bibliografía</b>	<b>137</b>

# Índice de figuras

1.1. Análisis de durabilidad del material compuesto. . . . .	18
1.2. Modos de daño más comunes en un material compuesto (Talreja and Singh, 2012). . . . .	19
2.1. Análisis de la fisuración intralaminar en laminados cruzados cargados uniaxialmente: (a) Nivel Macro ; (b) Nivel Micro, (Talreja, 1994). . . . .	25
2.2. Tamaño estándar de una fisura según la mecánica de la fractura (Barbero, 2008, sección 7.2). . . . .	26
2.3. Mínima celda unidad representativa, RVE (Barbero and Cosso, 2014). . . . .	28
2.4. Procedimiento iterativo para el cálculo de la densidad de fisuras ( $\lambda$ ). . . . .	29
2.5. Propagación de fisuras en las láminas $\pm 70^\circ$ , para el laminado $[0/\pm 70_4/0_{0.5}]_s$ , y sometido a una deformación del 0.7 % (Barbero, 2013, sección 9.1). . . . .	31
3.1. Mínima celda unidad representativa (RVE) con dimensiones $2l \times 1 \times 2h$ , siendo $2h$ el espesor del laminado. . . . .	37
3.2. Fisuras transversales en la matriz, en laminados balanceados con ángulos de orientación mayores a $45^\circ$ (Talreja, 1994). . . . .	39
3.3. Mínima celda unidad representativa, RVE. . . . .	44
3.4. Estado tensional en condiciones ideales para el laminado $[0/90/0]_s$ y la influencia de las perturbaciones generadas por la fisuración intralaminar. . . . .	47
3.5. Distribución lineal de tensiones de cortadura $\tau_{xz}$ para el laminado $[0/90/0]_s$ . . . . .	48
3.6. Distribución de desplazamientos aproximada para el laminado $[0/90/0]_s$ . . . . .	49
3.7. Tensiones interlaminares en las intercaras de un laminado genérico. . . . .	50
3.8. Sistema de coordenadas local de la lámina $i$ . . . . .	50
3.9. Sistema de coordenadas local de la lámina $i - 1$ . . . . .	53
4.1. Mínima celda unidad representativa (RVE) con dimensiones $2\ell \times 1 \times h$ , donde $h$ es el espesor de todo el laminado. . . . .	71
4.2. Distribución normal de tensiones antes y después de fisurarse para el laminado $[0/90/0]_s$ inicialmente simétrico. . . . .	80

4.3. Distribución lineal lámina a lámina de las tensiones intralaminares para un laminado $[0/90/90/0]$ . La lámina fisurada es $k = 3$ cuyas fibras están orientadas $\theta = 90^\circ$ . . . . .	81
4.4. Tensiones interlaminares en las intercaras de un laminado genérico. . . . .	82
4.5. Sistema de coordenadas local de la lámina $i$ . . . . .	83
4.6. Sistema de coordenadas local de la lámina $i-1$ . . . . .	85
4.7. Tensiones y desplazamientos promediados para un laminado $[0/90/0]_s$ con fisuras transversales, en la que solo se muestra la mitad del laminado sometida a tracción. La lámina fisurada es $k = 5$ con $\theta = 90^\circ$ . . . . .	88
5.1. Pérdida de rigidez del laminado vs densidad de fisuras para el laminado $[\pm\theta/90_4]_s$ tipo Fiberite/Hye-9082-A con $\theta = 15, 30, 40$ comparándola con datos experimentales. . . . .	102
5.2. Pérdida de rigidez del laminado vs densidad de fisuras para el laminado $[\pm\theta/90_4]_s$ tipo Fiberite/Hye-9082-A con $\theta = 15, 30, 40$ comparándola con datos FEA. . . . .	102
5.3. Pérdida de rigidez del laminado vs densidad de fisuras para los laminados $[0_2/90_4]_s$ y $[0/90_8/0_{1/2}]_s$ tipo Fiberite/Hye-9082-A comparándola con datos experimentales. . . . .	103
5.4. Pérdida de rigidez del laminado vs densidad de fisuras para los laminados $[0_2/90_4]_s$ y $[0/90_8/0_{1/2}]_s$ tipo Fiberite/Hye-9082-A comparándola con datos FEA. . . . .	103
5.5. Pérdida de rigidez del laminado vs densidad de fisuras para los laminados $[0/90_2]_s$ , $[0/90_3]_s$ y $[0_2/90_2]_s$ tipo Avimid K Polymer/IM6 comparándola con datos FEA. . . . .	104
5.6. Degradación del CTE del laminado vs densidad de fisuras para el laminado $[\pm\theta/90_4]_s$ tipo Fiberite/Hye-9082-A con $\theta = 15, 30, 40$ comparándola con datos FEA. . . . .	105
5.7. Degradación del CTE del laminado vs densidad de fisuras para los laminados $[0_2/90_4]_s$ y $[0/90_8/0_{1/2}]_s$ tipo Fiberite/Hye-9082-A comparándola con datos FEA. . . . .	105
5.8. Degradación del CTE del laminado vs densidad de fisuras para los laminados $[0/90_2]_s$ , $[0/90_3]_s$ y $[0_2/90_2]_s$ tipo Avimid K Polymer/IM6 comparándola con datos FEA. . . . .	106
5.9. Tensión intralaminar $\tau_{xz}(x)$ en la interfaz $0/90$ del laminado $[0_2/90_4]_s$ tipo Fiberite/Hye-9082-A, con una densidad de fisuras $\lambda = 0, 2 [mm^{-1}]$ . . . . .	107
5.10. Tensiones intralaminares $\tau_{xz}(x)$ en las interfaces $0/\pm 15$ y $\pm 15/90$ del laminado $[0/\pm 15/90_2]_s$ tipo Fiberite/Hye-9082-A, con una densidad de fisuras $\lambda = 0, 2 [mm^{-1}]$ . . . . .	108
5.11. Tensión intralaminar $\tau_{xz}(l)$ a través del espesor de un laminado $[0_2/90_4]_s$ tipo Fiberite/Hye-9082-A, con una densidad de fisuras $\lambda = 0, 2 [mm^{-1}]$ . . . . .	109

5.12. Tensión intralaminar $\tau_{xz}(l)$ a través del espesor de un laminado $[0_2/90_4]_s$ tipo Fiberite/Hye-9082-A con la lámina $[0_2]$ dividida en <i>dos</i> subláminas y una densidad de fisuras $\lambda = 0,2 [mm^{-1}]$ . . . . .	110
5.13. Tensión intralaminar $\tau_{xz}(l)$ a través del espesor de un laminado $[0_2/90_4]_s$ tipo Fiberite/Hye-9082-A con la lámina $[0_2]$ dividida en <i>cuatro</i> subláminas y una densidad de fisuras $\lambda = 0,2 [mm^{-1}]$ . . . . .	110
5.14. Tensión intralaminar $\tau_{xz}(l)$ a través del espesor de un laminado $[0_2/90_4]_s$ tipo Fiberite/Hye-9082-A con la lámina $[0_2]$ dividida en <i>ocho</i> subláminas y una densidad de fisuras $\lambda = 0,2 [mm^{-1}]$ . . . . .	111
5.15. Máxima tensión intralaminar $\tau_{xz}(l)$ como función del número de subláminas en la lámina $[0_2]$ y $[\pm 15]$ . . . . .	111
5.16. Izquierda: funciones elementales. Derecha: Desplazamientos promediados perturbados. Laminado $[0/\pm 15/90_2]_s$ con una densidad de fisuras $\lambda = 0,2 [mm^{-1}]$ . . .	113
5.17. Pérdida de rigidez a flexión vs. densidad de fisuras para los laminados $[0_2/90_4]_s$ y $[90_2/0_2]_s$ tipo Fiberite/HyE-9082A. . . . .	117
5.18. Pérdida de rigidez a flexión vs. densidad de fisuras para el laminado $[\pm\theta/90_4]_s$ tipo Fiberite/HyE-9082A con $\theta = 15, 30, 40$ . . . . .	118
5.19. Pérdida de rigidez a flexión vs. densidad de fisuras para los laminados $[0/90_3]_s$ y $[90_3/0]_s$ tipo Avimid-K/IM6. . . . .	118
5.20. Degradación del CTE* del laminado vs. densidad de fisuras para los laminados $[0_2/90_4]_s$ y $[90_4/0_2]_s$ tipo Fiberite/HyE-9082A. . . . .	119
5.21. Degradación del CTE* del laminado vs. densidad de fisuras para el laminado $[\pm\theta/90_4]_s$ tipo Fiberite/HyE-9082A con $\theta = 15, 30, 40$ . . . . .	119
5.22. Degradación del CTE* del laminado vs. densidad de fisuras para los laminados $[0/90_3]_s$ y $[90_3/0]_s$ tipo Avimid-K/IM6. . . . .	120
5.23. Tensiones interlaminares $\tau_{xz}(x)$ en las tres interfaces de un laminado $[0_2/90_4]_s$ tipo Fiberite/HyE-9082A con una densidad de fisuras $\lambda_k = 0,2 [mm^{-1}]$ . . . . .	121
5.24. Tensiones interlaminares $\tau_{xz}(x)$ en las cinco interfaces de un laminado $[0/\pm 15/90_2]_s$ tipo Fiberite/HyE-9082A con una densidad de fisuras $\lambda_k = 0,2 [mm^{-1}]$ . . . . .	122
5.25. Tensión intralaminar $\tau_{xz}(\ell)$ a través del espesor de un laminado $[0_2/90_4]_s$ tipo Fiberite/HyE-9082A, con una densidad de fisuras $\lambda_k = 0,2 [mm^{-1}]$ . . . . .	122
5.26. Tensión intralaminar $\tau_{xz}(\ell)$ a través del espesor de un laminado $[0_2/90_4]_s$ con la lámina $[0_2]$ dividida en <i>dos</i> subláminas y con una densidad de fisuras $\lambda_k = 0,2 [mm^{-1}]$ . . . . .	123

- 5.27. Tensión intralaminar  $\tau_{xz}(\ell)$  a través del espesor de un laminado  $[0_2/90_4]_s$  con la lámina  $[0_2]$  dividida en *cuatro* subláminas y con una densidad de fisuras  $\lambda_k = 0,2 [mm^{-1}]$ . . . . . 124
- 5.28. Tensión intralaminar  $\tau_{xz}(\ell)$  a través del espesor de un laminado  $[0_2/90_4]_s$  con la lámina  $[0_2]$  dividida en *ocho* subláminas y con una densidad de fisuras  $\lambda_k = 0,2 [mm^{-1}]$ . . . . . 124
- 5.29. Máxima tensión intralaminar  $\tau_{xz}(\ell)$  como función del número de subláminas en la lámina  $[0_2]$  y  $[\pm 15]$ . . . . . 125
- 5.30. Izquierda: funciones elementales. Derecha: Ángulos promediados perturbados. Laminado  $[0_2/90_4]_s$  con una densidad de fisuras  $\lambda_k = 0,2 [mm^{-1}]$ . La lámina fisurada es,  $k = 3$ , empezando desde abajo. . . . . 126

# Índice de tablas

3.1. Nomenclatura. . . . .	36
5.1. Propiedades de los compuestos Varna y Nairn. . . . .	100
5.2. Lista de laminados de estudio. . . . .	100
5.3. Cálculo de la longitud inefectiva $\delta$ . . . . .	112
5.4. Número de condición $C$ y autovalores $\lambda$ . . . . .	114
5.5. Lista de laminados de estudio. . . . .	116
5.6. Longitud inefectiva $\delta$ calculada a partir de las Figuras 5.23–5.24 para $M_x = 1$ . .	126
5.7. Número de condición $C$ y autovalores $\lambda$ . . . . .	127





# Capítulo 1

## Introducción

Los materiales compuestos se han empleado desde los inicios de la civilización hasta nuestro tiempo, ya sea mezclando paja con arcilla (adobe) o el propio hormigón. También están presentes en la naturaleza en múltiples formas pero no fue hasta la década de los sesenta cuando se estableció la teoría del laminado y se empezaron a producir fibras de alta resistencia; fue el comienzo de lo que definimos hoy en día como materiales compuestos avanzados.

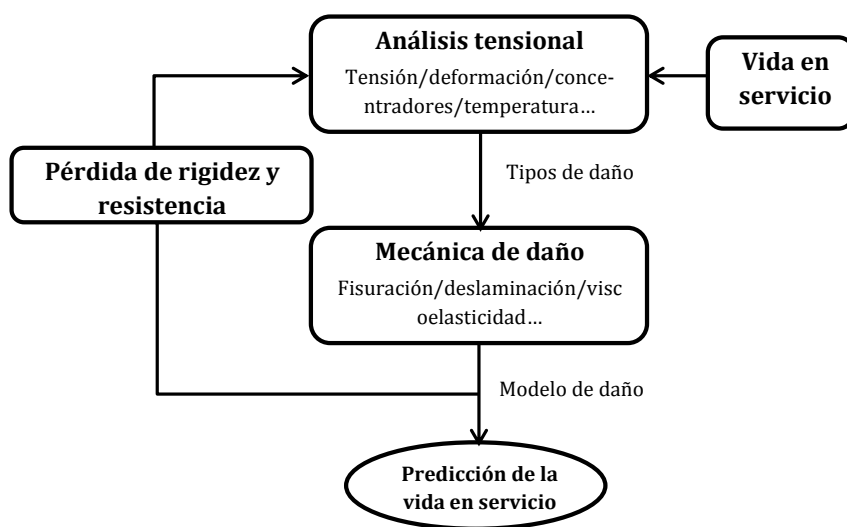
A pesar de los espectaculares progresos en el conocimiento y desarrollo de nuevos materiales, hay necesidades que solo los materiales compuestos son capaces de satisfacer de la manera más eficiente posible. Esto se debe principalmente a los siguientes motivos:

- Ofrecen unas propiedades mecánicas comparables o superiores a las aleaciones metálicas en combinación con una baja densidad
- Debido a su carácter anisótropo, nos permite jugar ingenierilmente adaptándonos a la solución del problema
- Tienen buenas propiedades de resistencia a la corrosión y/o temperatura dependiendo de los materiales utilizados
- Gran versatilidad y adaptación en el diseño y fabricación

Por este motivo, a partir de la década de los setenta, los materiales compuestos tomaron un papel importante en el campo aeroespacial y en aplicaciones mecánicas diversas. Sea cual sea el campo de aplicación, los materiales compuestos se diseñan con dos objetivos en mente: conservar la integridad estructural y permanecer inalterables durante su vida en servicio. Desde entonces, se han desarrollado importantes avances y metodologías con el fin de predecir la

fractura y fatiga de los materiales compuestos.

En la Figura 1.1 se muestra un esquema del proceso de diseño y análisis de los materiales compuestos para su vida en servicio. Primero se analiza el estado tensional al que va estar sometido el material, así como concentradores de tensiones o temperaturas a las que se expone. Una vez está diseñado, se analizan todos los posibles daños que pueden hacer fallar el material (fisuración, deslaminación, etc.) y se cuantifican mediante modelos de daño (típicamente pérdida de rigidez o resistencia). Una vez se ha cuantificado el daño, se comprueba de nuevo la integridad estructural del material para su vida en servicio y así hasta que el proceso converge.



*Figura 1.1: Análisis de durabilidad del material compuesto.*

Para poder cuantificar el daño que se produce en el material, primero hay que saber cuáles son los daños más comunes y la influencia que pueden ocasionar durante su vida en servicio. Basado en datos experimentales (Nuismer and Tan, 1988; Tan and Nuismer, 1989; Liu and Nairn, 1992; Adolfsson and Gudmundson, 1999; Nairn, 2000; Nairn and Hu, 2004; Mayugo et al., 2010), se ha demostrado que para laminados cruzados-balanceados, uno de los fallos más comunes es la formación de fisuras transversales en la matriz, incluso para deformaciones del 0,4% dependiendo de la configuración. Estas fisuras se inician primero en los defectos del laminado, en fracciones volumétricas con alto contenido en fibras o en zonas ricas de matriz. Las primeras fisuras se inician típicamente en las láminas a  $90^\circ$  y se propagan rápidamente a lo largo del espesor, de forma que crecen aisladas unas de otras sin que se produzca ningún tipo de interacción, pero según aumenta la densidad de fisuras en su interior, es necesario aumentar la carga para producir nuevas fisuras intermedias. A medida que la distancia entre fisuras disminuye, se producen pérdidas de adherencia interfacial cerca de las láminas adyacentes provocando

concentradores de tensiones y favoreciendo la deslaminación. Aunque estas deslaminaciones son pequeñas y aisladas al principio, aumentan rápidamente al ir incrementando la carga, de manera que el daño empieza a ser cada vez más localizado y se vuelve inestable, lo que conlleva a una rotura de fibras y en general, a la pérdida estructural definitiva. En la siguiente Figura 1.2, vemos los distintos modos de daño que se producen en un material compuesto según el orden de aparición.

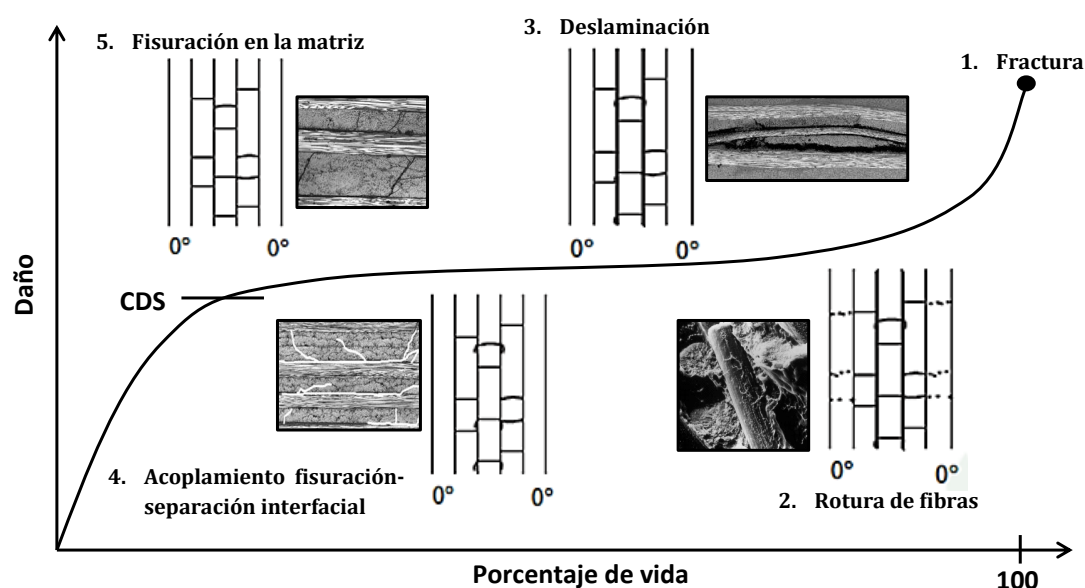


Figura 1.2: Modos de daño más comunes en un material compuesto (Talreja and Singh, 2012).

## 1.1. Objetivos

El propósito de este trabajo es desarrollar modelos analíticos en laminados de matriz polimérica con fisuración intralaminar con dos aspectos a tener en cuenta:

- Predecir la degradación de las propiedades mecánicas de los laminados ante este tipo de fallos para los modelos aquí desarrollados.
- Mejorar ciertos aspectos que los modelos existentes actualmente presentan. Aunque una gran mayoría son capaces de calcular la degradación de las propiedades mecánicas, siguen presentando grandes limitaciones.

Muchos de los modelos que ya se han desarrollado, se ajustan solo para unas pequeñas configuraciones, principalmente para laminados cruzados simétricos y, solo en algunos casos, para laminados cruzados-balanceados simétricos. Algunos modelos son capaces de predecir además

la iniciación y evolución del daño pero presentan grandes problemas de convergencia cuando necesitan iterar lámina a lámina hasta dar con la solución final. Otros, por ejemplo, usan un sistema de coordenadas oblicuas que solo permite analizar un máximo de dos láminas que se están fisurando a la vez, de forma muy compleja y poco eficiente. También existen otros modelos analíticos que proporcionan una solución aproximada en forma de serie o necesitan un estudio paramétrico previo para ajustar los parámetros de un material determinado. Por lo general, es difícil encontrar modelos que cuantifiquen de manera exacta las tensiones intra/interlaminares que se producen en el interior y ninguno de los modelos desarrollados, permite comprender el fenómeno físico real que se esconde detrás.

Por este motivo, los dos modelos analíticos desarrollados en este trabajo se han reducido a una dimensión, lo que nos permite solucionar el problema mediante un sistema de ecuaciones diferenciales exactas y por tanto, explicar el fenómeno real y solucionar los problemas de convergencia anteriormente descritos. Estos modelos nos servirán también como puntos de referencia para otros modelos numéricos o aproximados aunque sea en un estado de tensión plana.

Esta idea de reducir los problemas a una dimensión, nos condujo a realizar otro modelo para un estado de cargas a flexión que a día de hoy no se ha desarrollado eficientemente, hasta tal punto, que no se han encontrado datos experimentales o estudios por elementos finitos fiables con el que comparar los resultados.

### 1.2. Estructura del proyecto

Este proyecto está dividido en siete capítulos, tratando el primero de ellos en el proceso de diseño y los principales modos de daño en los materiales compuestos. Además, se ha realizado una revisión de la literatura.

En el segundo capítulo, se hace una pequeña introducción a la modelización mecánica del daño, donde se exponen brevemente los conceptos básicos de la mecánica de la fractura, la modelización de las fisuras y la teoría de fallo múltiple en laminados unidireccionales. También, se introduce la metodología de iniciación y evolución de las fisuras a través de la mecánica del daño continuo y discreto, así como el concepto de la "*mínima celda unidad representativa*" (*RVE*) y los pasos para calcular las propiedades degradadas del material. Por otra parte, se explica el procedimiento para determinar la densidad de fisuras en el interior del laminado mediante un proceso de convergencia. Por último, se analiza las idealizaciones más comunes en este tipo de

modelos.

En el tercer capítulo, se desarrolla un modelo analítico unidimensional para los estados de tensión y deformación plana, así como los cálculos y procedimientos necesarios para obtener la degradación del laminado sometido a un estado de cargas membranar.

En el cuarto capítulo, se desarrolla otro modelo analítico unidimensional para un estado de tensión plana sometido a flexión pura. De nuevo, se detallan todos los cálculos y procedimientos necesarios para obtener la degradación del laminado a flexión.

En el quinto capítulo, se hace una discusión de los resultados para laminados de matriz polimérica tanto de fibra de vidrio como de carbono para cada uno de los modelos desarrollados. Además se extraen importantes conclusiones y se comparan con resultados numéricos y experimentales en aquellos casos disponibles.

En el sexto capítulo, se hace una conclusión final de los modelos analíticos desarrollados y se plantean posibles trabajos futuros a seguir en este campo.

Finalmente, se aporta un capítulo de anexos donde se recogen los programas desarrollados para la obtención de los resultados y la bibliografía utilizada en este proyecto.

### 1.3. Revisión de la literatura

Como se ilustra en la Figura 1.2 de la sección anterior, la fisuración de la matriz es el primer modo de fallo en laminados compuestos con matriz polimérica sujetos a cargas quasi-estáticas, fatiga e impacto (Talreja and Singh, 2012). Las fisuras en la matriz son causadas por una combinación de tracción transversal y deformaciones de cortadura en el plano (Davila, 2013). Bajo estas condiciones, los defectos ya existentes en los laminados, crecen en forma de fisuras una vez la tasa de liberación de energía excede la tenacidad a fractura intralaminar de dicha lámina (G. J. Dvorak and Hejazi, 1985). La fisuración que sufre la matriz, aumenta la permeabilidad del laminado permitiendo la fuga de gases/líquidos y facilita el acceso a contaminantes que degradan las fibras. Además, la fisuración de la matriz a menudo precede a modos catastróficos de daño tales como la deslaminación o la reducción de la vida a fatiga (Talreja and Singh, 2012). Finalmente, la pérdida de rigidez de las láminas fisuradas, produce una redistribución de las tensiones en el resto de las láminas. Esta redistribución puede ocasionar la rotura de las fibras

debido al exceso de tensión al que se ven sometidas, y por lo tanto, predecir la iniciación de daño y su evolución es un factor importante para predecir el fallo del laminado (M. M. Moure and Barbero, 2014).

Este trabajo se centra en métodos de resolución que requieren el menor número posible de las propiedades del material para lograr predicciones que sean comparables con datos experimentales. Este enfoque excluye todos aquellos métodos que requieren un ajuste de parámetros basados en leyes de endurecimiento empírico (P. Lonetti and Barbero, 2003; Barbero and Lonetti, 2005). El resto de métodos, incluyen aquellos modelos que se basan en la mecánica de la fractura (McCartney, 2005b,a; Barbero and DeVivo, 2001) o modelos basados en una combinación de fractura y resistencia (Camanho and Davila, 2002; E. J. Barbero and Weadon, 2013). Además, nuestro estudio está limitado a materiales elástico-lineales sin daño interfacial (fibra-matriz) o deslaminación. Bajo estas restricciones, las soluciones disponibles pueden ser aproximadas (Tan and Nuismer, 1989; Yokozeki and Aoki, 2004) o numéricas (P. Ladevèze and Lévêque, 2000; F. Rastellini and Oñate, 2008; X. Martinez and nate, 2011; E. J. Barbero and Weadon, 2013), las cuales requieren de experimentos previos o soluciones analíticas para poder validarlas.

Muchos de los experimentos están limitados a unas pocas configuraciones de laminados y solo en aquellos casos que pueden ser medibles, por ejemplo, la degradación de rigidez en laminados de fibra de carbono es muy difícil de medir. Por este motivo, las soluciones analíticas son deseables ya que pueden utilizarse como puntos de referencia para el resto de modelos, incluyendo aquellas soluciones analíticas en condiciones de tensión plana o las que están restringidas por un comportamiento del material elástico-lineal.

Experimentalmente se ha demostrado que en laminados cruzados de matriz polimérica cuya secuencia de apilamiento es  $[0_m/90_n]_s$ , sometidos a cargas unidireccionales, las láminas a  $90^\circ$  sufren fisuración en la matriz cuando se les aplica una carga en dirección  $x$  (Nuismer and Tan, 1988; Tan and Nuismer, 1989; Liu and Nairn, 1992; Adolfsson and Gudmundson, 1999; Nairn, 2000; Nairn and Hu, 2004). Algunos modelos basados en estas observaciones son (Nuismer and Tan, 1988) para laminados con una secuencia de apilamiento  $[0/90_n]_s$  y (Mayugo et al., 2010) para laminados con una secuencia de apilamiento  $[\pm\theta/90_n]_s$ .

En 2004, se presentó una solución analítica aproximada para calcular la reducción de rigidez de laminados con fisuras en la matriz (Yokozeki and Aoki, 2004). Este modelo asume que a lo sumo dos láminas, con distintos ángulos, pueden fisurarse a la vez y para ello, utilizan un

sistema de coordenadas oblicuo. En este modelo, las ecuaciones de elasticidad tridimensionales (3D) son reducidas a dos dimensiones (2D) mediante ciertas aproximaciones, la cual destaca la asunción de distribuciones de tensiones intralaminas lineales lámina a lámina. Como el estado resultante es 2D, debe resolverse un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDOS's) cuya solución es aproximada. Basado en esta solución, otros modelos incorporaron la iniciación y evolución del daño (Cortes and Barbero, 2010) para predecir la densidad de fisuras como función de la deformación aplicada, y utiliza un sistema de coordenadas cartesianas para la lámina dañada. De esta manera, al hacer uso de la mecánica del daño continuo (CMD), nos permite extender el método de resolución para cualquier número de láminas, las cuales pueden dañarse simultáneamente (Barbero and Cortes, 2010). Los resultados obtenidos a través de este modelo comparándolos con los datos experimentales arrojan una elevada fiabilidad (Barbero and Cosso, 2013; E. J. Barbero and Martinez, 2013; Barbero and Cosso, 2014).

El número de aproximaciones, en las soluciones anteriormente citadas, pueden simplificarse a un estado unidimensional (1D), reduciendo los problemas 3D a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's) cuya solución analítica es cerrada y exacta. Aunque la aplicabilidad de los modelos unidimensionales es limitada, pueden analizarse estructuras de gran importancia: alas de los aeronaves, fuselajes y todo tipo de mástiles que pueden ser tratados en primera aproximación en una dimensión, es decir, en un estado de deformación plana a lo largo de una longitud o en un estado de tensión plana a través del espesor (Sun, 1998). Por otra parte, las vigas pueden ser asumidas en primera aproximación a un estado de tensión plana tanto a lo ancho como a lo largo del espesor. Por último, las soluciones analíticas unidimensionales, también pueden usarse como puntos de referencia para aproximaciones numéricas que quizás sean desarrolladas en el futuro.





# Capítulo 2

## Base teórica

### 2.1. Modelización mecánica

En el estudio de laminados cruzados con una secuencia de apilamiento  $[0_m/90_n]_s$  y cargados uniaxialmente, las láminas cruzadas, cuya resistencia a tracción se debe principalmente a la matriz ( $F_{2t}$ ), sufren daño en forma de fisuras transversales que afecta al comportamiento mecánico del laminado. Cuando analizamos el laminado compuesto como un sólido heterogéneo (láminas con diferentes orientaciones) con distintas propiedades, nos permite estudiar el daño directamente en el interior del laminado y analizar la influencia de estas perturbaciones para calcular unos desplazamientos promediados. De esta manera, estos desplazamientos promediados nos permitirá obtener unas propiedades homogeneizadas a fin de caracterizar el comportamiento mecánico del laminado como un sólido homogéneo. En la Figura 2.1, se ilustran las fisuras transversales en forma elipsoidal, representando de forma exagerada fisuras que pueden tener un espesor nulo en la realidad.

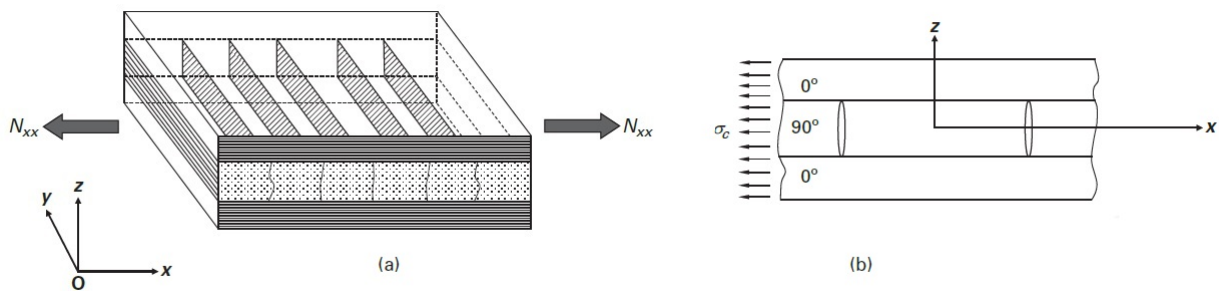


Figura 2.1: Análisis de la fisuración intralaminar en laminados cruzados cargados uniaxialmente: (a) Nivel Macro ; (b) Nivel Micro, (Talreja, 1994).

Cuando una lámina se encuentra embebida en un laminado, la resistencia transversal a tracción ( $F_{2t}$ ) de dicha lámina, varía debido al efecto restrictivo que aportan las láminas adyacentes, lo que conlleva a un aumento de la resistencia bajo estas de condiciones. En estos casos, la resistencia en dirección transversal es una función del espesor,  $F_{2t} = f(h)$ , y por lo tanto, no podemos utilizar este valor como una propiedad de la lámina. Por este motivo, es necesario hacer uso de la mecánica de la fractura asumiendo que los materiales tienen defectos internos. Éstos serán los puntos de partida de la nucleación y propagación de las fisuras, que primero abarcarán todo el espesor de la lámina y posteriormente crecerán de forma inestable en la dirección de las fibras.

La existencia de defectos en el interior de la lámina es un fenómeno inherente al material y al proceso de fabricación, tales como la fisuración interfacial, el deslizamiento fibra-matriz, microfisuras, cavidades,... y todos estos defectos actúan como concentradores de tensiones y favorecen la nucleación y propagación de fisuras en la matriz polimérica. Teniendo en cuenta estos defectos, la mecánica de la fractura asume que existen fisuras en su interior (defectos) de un determinado tamaño característico como ilustra la Figura 2.2. También se recurre al principio de Griffith (Anderson, 1995) usando principios energéticos para calcular la tasa de liberación de energía (*ERR*, *Energy Release Rate*),  $G_i = -\frac{\Delta U_i}{\Delta A}$  y saber así, cuándo se produce la propagación de las fisuras, cuyos parámetros  $U$  y  $A$  son, la energía de deformación y superficie generada respectivamente.

Los parámetros  $G_{Ic}$  y  $G_{IIc}$  en los modos I y II respectivamente, son las energías críticas de deformación que provocan la propagación de fisuras en la matriz polimérica. Estas energías de deformación, sí son propiedades del material y se denominan "*tenacidades a fractura*", cuyos valores han sido estudiados y verificados experimentalmente (E. J. Barbero and Martinez, 2013).

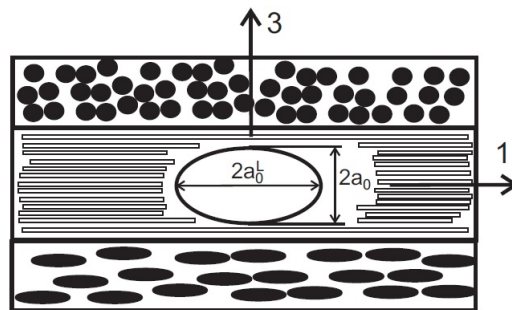


Figura 2.2: Tamaño estándar de una fisura según la mecánica de la fractura (Barbero, 2008, sección 7.2).

En materiales heterogéneos, como sucede en los materiales compuestos, el fallo del laminado se puede producir debido a una fractura crítica según un determinado mecanismo de daño (por ejemplo, deslaminación) o soportar múltiples fracturas hasta que el laminado se separa en dos o más trozos. En nuestro caso, la fisuración intralaminar en láminas transversales, provoca pérdidas de carga en el interior del laminado que son absorbidas por las fibras o las láminas adyacentes sin que se produzca un fallo repentino del material, y ésto a su vez, produce una pérdida de rigidez global del laminado y un aumento de las deformaciones mecánicas. Este fenómeno se estudió en la década de los setenta (J.Aveston and Kelly, 1971) y en ella se expone los principios básicos de la fracturación múltiple. Entre las hipótesis más importantes destacan:

- Las fibras son del mismo diámetro y están uniformemente distribuidas.
- Las fibras están alineadas paralelas unas de otras.
- La fibra y matriz presentan un comportamiento elástico-lineal.
- Uno de los componentes tiene una deformación a rotura menor que el otro, ( $\epsilon_{fu} > \epsilon_{mu}$ ) para el caso de fibras de vidrio ó ( $\epsilon_{mu} > \epsilon_{fu}$ ) en fibras de carbono, generalmente.
- Cuando falla el constituyente más débil, la fibra o lámina adyacente debe ser capaz de soportar la carga adicional. Para el caso de láminas unidireccionales de fibra de carbono con matriz polimérica, las láminas adyacentes soportan sin ninguna dificultad esta carga adicional, mientras que en láminas de fibra de vidrio, la matriz juega un papel mucho más importante, ya que no existe tanta diferencia de rigidez entre la fibra y la matriz.
- Las propiedades de la fibra y de la matriz permanecen constantes a lo largo del historial de deformación.
- La propagación de las fisuras en láminas delgadas, se produce de manera repentina e inestable a lo largo de toda la sección transversal. En el instante en que se produce la fisuración, la tensión normal en la cara fisurada pasa a ser cero, es decir, una condición de borde libre y por tanto, deja de soportar tensión.

## 2.2. Mecánica del daño discreto y continuo

Los modelos de daño que se han desarrollado en los capítulos posteriores, tienen como objetivo predecir el comportamiento mecánico del laminado una vez se ha producido la fisuración de láminas transversales en su interior. Para ello, analizamos lo que comúnmente se denomina una mínima celda unidad representativa (RVE, *Element Volume Representative*), que tiene la peculiaridad de que somos capaces de analizar el daño que sufre una lámina en su interior a una escala micro pero que a su vez, contiene todas las heterogeneidades que caracterizan al laminado a escala macro. En consecuencia, esto nos permitirá saber como afecta el daño de una lámina fisurada a la rigidez global del laminado.

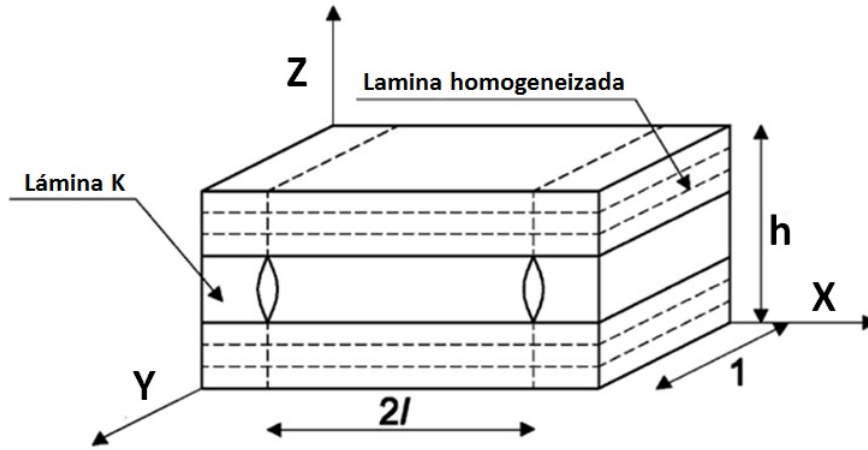


Figura 2.3: Mínima celda unidad representativa, RVE (Barbero and Cosso, 2014).

En estos modelos de daño se producen dos etapas: la aparición de fisuras transversales en el interior del laminado como consecuencia de una deformación aplicada y el cálculo del comportamiento constitutivo del laminado (rigidez), en función de la **densidad de fisuras** ( $\lambda$ ) existente.

En primer lugar, se calcula la densidad de fisuras ( $\lambda$ ) asociada a una deformación o carga aplicada al laminado, es decir, a medida que aumenta la carga, también lo hace el número de fisuras en el interior del laminado.

A la vista de lo anterior, se realiza una serie de pasos para calcular la densidad de fisuras ( $\lambda$ ) contenida:

- Se calcula la energía de deformación existente ( $G_I$  y  $G_{II}$ ) para una deformación aplicada

y se compara con las tenacidades a fractura intralaminares en modos I y II ( $G_{Ic}$  y  $G_{IIc}$ )

- Mediante una función, denominada *función de activación de daño* ( $g$ ), comprobamos el umbral de daño existente en el laminado. Esta función nos indica cuando se produce la nucleación de nuevas fisuras ( $g = 0$ ), el crecimiento y propagación ( $g > 0$ ) de las mismas en el interior del laminado o si nos encontramos, en un estado no perjudicial ( $g < 0$ ) en el cual no se produce más fisuración. Dicha función se expresa de la siguiente manera:

$$g = \max \left[ \frac{G_{I(\lambda, \varepsilon^o, \Delta T)}}{G_{Ic}}, \frac{G_{II(\lambda, \varepsilon^o, \Delta T)}}{G_{IIc}} \right] - 1 \leq 0; \quad \text{función de activación de daño } g$$

- Una vez es conocido el estado de daño para el cual nos encontramos en condiciones de crecimiento y propagación ( $g < 0$ ), el modelo itera sucesivamente hasta encontrar una densidad de fisuras ( $\lambda$ ) que se ajuste el equilibrio del laminado para la deformación aplicada que satisfaga la condición ( $g = 0$ ). La siguiente ecuación nos ayuda a calcular el incremento de densidad de fisuras ( $\Delta\lambda$ ) hasta llegar al equilibrio:

$$\Delta\lambda = \frac{-g}{\frac{\partial g}{\partial \lambda}}; \quad \text{función actualizadora de daño}$$

La función de activación de daño ( $g$ ), además de indicar el inicio y la propagación de las fisuras, también reproduce un *factor de endurecimiento*, es decir, para un cierto valor de carga aplicada, la tasa de liberación de energía ( $G_I$  y  $G_{II}$ ) decrece con  $\lambda$  hasta encontrarnos en un estado no perjudicial ( $g < 0$ ) y deteniendo así, la formación de fisuras hasta un nuevo incremento de carga. En la Figura 2.4 se ilustra de manera esquemática, el procedimiento para el cálculo de la densidad de fisuras.

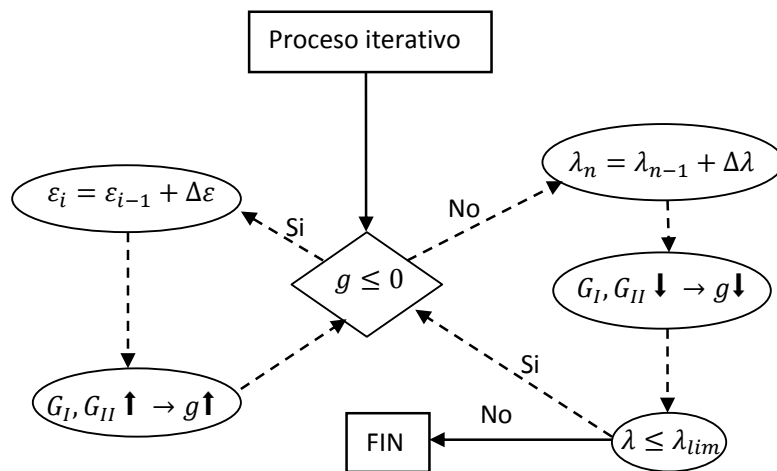


Figura 2.4: Procedimiento iterativo para el cálculo de la densidad de fisuras ( $\lambda$ ).

En la segunda etapa, se calcula la pérdida de rigidez del laminado en función de la densidad de fisuras o variable de estado ( $\lambda$ ) obtenida anteriormente. Definida la densidad de fisuras como la inversa de la distancia entre dos fisuras consecutivas, procedemos a calcular la pérdida de rigidez mediante un RVE.

De la misma manera que antes, se realiza una serie de pasos para determinar la pérdida de rigidez:

- Primero modelizamos el RVE para una densidad de fisuras ( $\lambda$ ) y se implementa la geometría y las condiciones de contorno. Además, las fisuras se aproximan a discontinuidades como se muestra en la Figura 2.3.
- Posteriormente, se calcula el campo perturbado de desplazamientos en las cercanías de la fisura por el siguiente motivo: cuando una lámina es fisurada, deja de soportar tensión en el extremo (superficie normal a la grieta) y aparecen mecanismos de cortadura fuera del plano ( $\tau_{xz}$ , *shear-lag*, ) que redistribuyen la pérdida de carga de la lámina fisurada a las láminas adyacentes, es decir, se produce una redistribución de tensiones en todo el laminado.
- Este campo perturbado de desplazamientos que contiene toda la información debida a la formación de fisuras, nos permite calcular la pérdida de rigidez del laminado y una vez ha sido calculada, obtenemos la pérdida de rigidez de la lámina fisurada supuesto el resto de láminas intactas y homogeneizadas.
- Por último, este proceso se repite sucesivamente considerando cada una de las láminas que pueden fisurarse y obtener así, la pérdida de rigidez global definitiva. Para facilitar este cálculo y reducir la complejidad que supone analizar fisuras en distintas láminas que se producen al mismo tiempo, se hace uso de las mecánicas del daño discreto y continuo.

En resumen, se calcula la densidad de fisuras ( $\lambda$ ) para una carga aplicada y obtenemos la degradación de rigidez del laminado, a partir de las fisuras que se producen en el interior de la matriz polimérica. Dichas fisuras aparecen debido a esfuerzos transversales ( $\sigma_y$ ) o de cortadura ( $\tau_{xy}$ ), propagándose en dirección paralela a las fibras (ver Figura 2.3) y provocan una redistribución de esfuerzos en el resto de láminas del laminado.

Finalmente, a medida que aumentamos la carga, la densidad de fisuras también aumenta ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) hasta que la lámina fisurada pierde toda su rigidez y por tanto, la carga que inicialmente soportaba se redistribuye en el resto del laminado. En ese momento la densidad de fisuras

es tal que la distancia entre dos fisuras consecutivas es el propio espesor de la lámina, ( $\lambda_{lim} = \frac{1}{h_i}$ ).

Desde un punto de vista experimental se ha comprobado que, la propagación de fisuras transversales a lo largo de la matriz en laminados simétricos cruzados  $[0_m/90_n]_s$  o incluso en laminados balanceados simétricos  $[0_m/\pm\theta_r/90_n]_s$ , se produce en las láminas a  $90^\circ$ . En la Figura 2.5, se muestra la dirección de propagación de las fisuras en dirección paralela a las fibras, pero para este caso en concreto, al no haber láminas a  $90^\circ$  y sí, láminas balanceadas a  $\pm 70^\circ$ , son éstas últimas las que sufren la formación de fisuras en la matriz.

En los capítulos sucesivos nos centraremos en la segunda etapa del proceso, es decir, calcularemos la pérdida de rigidez de laminados balanceados simétricos  $[0_m/\pm\theta_r/90_n]_s$ , puesto que la etapa de iniciación y evolución del daño para los modos de fallo I y II, ya han sido desarrollados eficientemente. (E. J. Barbero and Wheadon, 2013).



*Figura 2.5: Propagación de fisuras en las láminas  $\pm 70^\circ$ , para el laminado  $[0/\pm 70_4/0_{0.5}]_s$ , y sometido a una deformación del 0.7% (Barbero, 2013, sección 9.1).*

## 2.3. Idealización

La modelización descrita anteriormente, es una idealización puesto que en la resolución de problemas reales, normalmente se da por válido una serie de aproximaciones que aunque no representan con exactitud el fenómeno real, bien nos acerca a la solución final. En unos casos, esta idealización será una condición necesaria para reducir en la medida de lo posible la complejidad del problema, mientras que en otros, el coste matemático y computacional no compensa la pérdida de información que asumimos al simplificar el problema inicial.

A continuación, se presentan las hipótesis más comunes que aparecen en este tipo de modelos:

- Anisotropía y heterogeneidad: las láminas unidireccionales que componen el laminado de un material compuesto, se suponen homogéneas con un comportamiento ortótropo transversalmente isótropo cuando se encuentran sometidas a estados de sollicitación pla-

nos. Esta hipótesis, no tiene en cuenta posibles concentradores de tensiones que pueden ocasionar otros mecanismos de fallos en el laminado.

- La propia geometría de la fisura produce singularidades que provocan concentradores de tensiones que son difíciles de analizar. Para resolver esto, se promedia el desplazamiento en el extremo de la fisura a lo largo del espesor evitando así el cálculo numérico o finito.
- Cuando un laminado presenta una densidad de fisuras alta (pequeñas distancias entre fisuras consecutivas), se producen interacciones que perturban tanto el estado tensional como el campo de desplazamientos y por tanto, se vuelve muy complejo relacionar estos hechos. La densidad de fisuras a partir de la cual se produce la pérdida de rigidez total de la lámina fisurada es,  $\lambda_{limite} = h$ .
- En un escenario real, las fisuras pueden ser curvas, estar espaciadas irregularmente a lo largo del laminado, abarcar un espesor menor que el espesor de la lamina, etc. Estos escenarios suponen un problema a la hora de evaluar el daño y establecer un contorno que mantenga una cierta periodicidad. Por este motivo, se supondrá un RVE que nos permita reducir el problema de contorno a una distribución uniforme de fisuras y conseguir así, que se repita la misma mínima celda unidad representativa. Experimentalmente se ha demostrado que al principio esta distancia entre fisuras no es la misma, pero a medida que aumentamos la carga, ésta entre fisuras converge rápidamente a un mismo valor (E. J. Barbero and Martinez, 2013).
- El RVE debe contener todas las heterogeneidades del laminado y una cantidad de fibras suficientemente alta para proporcionar unas buenas propiedades promediadas. Aunque las fisuras perturben el campo tensión-deformación en las proximidades, lejos de ellas, siguen cumpliéndose las hipótesis de CLT (*Teoría clásica de Laminados*).
- La fisuración transversal en la matriz, provoca además desuniones interfaciales entre las fibras mas cercanas y las laminas adyacentes. Como consecuencia, se favorecen otros mecanismos de fallo como la deslaminación o fractura de fibras, que aunque no aparecen contemplados en el estudio, está comprobado experimentalmente que empiezan a emerger para densidades de fisuras cercanas al valor límite ( $\lambda_{limite}$ ).



## Capítulo 3

# Solución analítica en laminados con fisuras en la matriz. Cargas membranales

En este capítulo se presenta un modelo analítico unidimensional que hace uso de la mecánica del daño discreto (*Discrete Damage Mechanics, DDM*) para predecir el comportamiento mecánico del laminado para una densidad de fisuras en su interior. El modelo aquí presentado, se inspira en el modelo de Aoki (Yokozeki and Aoki, 2004) que posteriormente E. J. Barbero (Barbero and Cosso, 2014) desarrolló unificando las teorías de daño continuo y discreto.

- El modelo analítico de Aoki, hace uso de la mecánica del daño discreto para predecir la reducción de rigidez de un laminado en función de la densidad de fisuras, a lo sumo, en dos láminas con distintas orientaciones que se están fisurando a la vez. Uno de los problemas de este modelo, es que Aoki no incorpora el criterio de iniciación ni evolución del daño, y además, utiliza un sistema de coordenadas oblicuas (no cartesianas) que resulta muy complejo y engorroso. El valor añadido que proporciona el modelo de Aoki, es la resolución de las ecuaciones de equilibrio interno de manera aproximada mediante EDP's, pero la solución que ofrece, solo da buenos resultados para laminados formados con un número de láminas menor que cuatro ( $N \leq 4$ ), ya que para un número mayor, presenta problemas de convergencia numérica. Tampoco existen pruebas de unicidad en su solución.
- El modelo analítico de E. J. Barbero hace uso del modelo de Aoki y resuelve su complejidad mediante la mecánica del daño continuo (*Continuum Damage Mechanics, CDM*). Para ello, el modelo proporciona el análisis de fisuración de una lámina y la homogeneiza para computarla en el resto del laminado mediante unas propiedades promediadas. De esta manera, podemos iterar el proceso tantas veces como sea necesario hasta que el problema converge, independientemente del número de láminas que se estén fisurando a la vez. Aun

así, la solución que propone sigue presentando problemas de convergencia numérica y tampoco existe pruebas de unicidad en su solución.

Las razones anteriormente descritas son las que motivaron este trabajo, el cual, partiendo del modelo analítico de E. J. Barbero, se implementará un modelo de daño simplificado a una dimensión, aunque dichas aproximaciones solo se correspondan con unos pocos casos reales. Este modelo sometido a cargas membranales, permite idealizar y obtener valores aproximados sobre su comportamiento, entender el fenómeno real físico que hay detrás, mejorar el método de resolución para obtener una mejor convergencia numérica y extraer importantes conclusiones que se detallan en el apartado de discusión de los resultados.

Por último, se implementa un programa en MATLAB R2013 que se adjunta en el anexo A.1, para analizar los resultados obtenidos de un conjunto de laminados y compararlos con datos experimentales y, con resultados de elementos finitos ya existentes.

### **3.1. Solución analítica unidimensional: tensión y deformación plana**

Esta simplificación unidimensional (1D) aporta información de valor añadido en muchos aspectos sobre el modelo bidimensional (2D) comentado anteriormente (Barbero and Cosso, 2014), y permite estudiar el comportamiento físico real, así como extraer importantes conclusiones.

En primer lugar, nos proporciona resultados con alto nivel de exactitud para los casos en el que las dimensiones del laminado son mucho mayores en una dirección frente a otra, ya sea en un estado de deformación o tensión plana. Aunque perdemos información en las condiciones de borde libre donde existen singularidades, el modelo se ajusta bien para muchos tipos de estructuras existentes hoy en la industria.

En segundo lugar, se puede estudiar el comportamiento real del laminado debido a que las ecuaciones que rigen el modelo son EDOS's en vez de EDP's y de esta manera, obtenemos una solución exacta y cerrada que proporciona el comportamiento físico real.

Por último, somos capaces de entender la física que se esconde detrás de la solución matemática y resolver así, problemas de tipo numérico.

Aunque este modelo simplifica los cálculos y nos proporciona resultados fiables, también tiene sus limitaciones los cuales se presentan a continuación:

- El laminado tiene que ser simétrico. Los principales motivos son:
  - I. Eliminar posibles acoplamientos entre cargas (axil-flexión, axil-torsión, curvaturas,...)
  - II. Son los de mayor utilización a nivel constructivo siempre que la ocasión lo permita.
  - III. Conseguimos reducir una gran cantidad de esfuerzos internos tanto en su utilización y fabricación, y por tanto, mayor seguridad constructiva (menos fallos).
  - IV. Trabajan bien en condiciones de membrana.
- Al ser un modelo unidimensional, se reduce el abanico de posibilidades de construcción (una gran mayoría de laminados en la industria presentan láminas en distintas orientaciones) a laminados cruzados simétricos con una secuencia de apilamiento:  $[0_n/90_m]_s$ , ya que cuando se presentan láminas en direcciones  $[+\theta, -\theta]$ , se producen además esfuerzos de cortadura en el plano, que implican la necesidad de utilizar un modelo en dos dimensiones. Para solucionar esto, consideraremos cada grupo  $[+\theta, -\theta]$  como una única lámina  $[\pm\theta]$  con propiedades equivalentes.
- Los efectos de borde, que se producen en las láminas unidireccionales, se despreciarán suponiendo un estado infinitamente largo en dirección  $y$ . Esto hecho, supone eliminar ciertos mecanismos existentes cerca del borde para mantener el equilibrio de la lámina (Pagano and Piper, 1970). Por el contrario, suponer un estado de deformación plana ( $\epsilon_y = 0$ ), implica más rigidez que la de una viga que se encuentra en un estado de tensión plana ( $\sigma_y = 0$ ).

La siguiente tabla recoge la nomenclatura que se va a utilizar en los capítulos posteriores:

<i>Nomenclatura</i>	<i>Descripción</i>
i	Lámina genérica del laminado
k	Lámina fisurada
m	Lámina genérica no fisurada ( $m \neq k$ )
r	Lamina de referencia no fisurada ( $r \neq k$ )
X, Y, Z	Coordenadas globales del laminado
$x_i, i = x, y \text{ o } z$	Coordenadas de la lámina en ejes globales
$u(x_i), v(x_i), w(x_i)$	Desplazamientos de la lámina según coordenadas globales
$\hat{a}$	Valor promedio de una magnitud a
$\tilde{a}$	Valor original de la magnitud a
$\bar{a}$	Magnitud a expresada en coordenadas globales
$\hat{u}^i(x_i), \hat{v}^i(x_i), \hat{w}^i(x_i)$	Desplazamientos promediados de la lámina i según coordenadas globales
$\hat{\varepsilon}_x^i(x_i), \hat{\varepsilon}_y^i(x_i), \hat{\varepsilon}_{xy}^i(x_i)$	Deformaciones promediadas de la lámina i según coordenadas globales
$\hat{\sigma}_x^i(x_i), \hat{\sigma}_y^i(x_i), \hat{\tau}_{xy}^i(x_i)$	Tensiones promediadas de la lámina i según coordenadas globales
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Deformación del laminado según coordenadas globales
$K_x, K_y, K_{xy}$	Curvatura del laminado según coordenadas globales

Tabla 3.1: Nomenclatura.

En los apartados sucesivos, todos los cálculos se expresarán en términos de ejes globales  $x, y, z$  del laminado.

## 3.2. Aproximaciones

A continuación, se presentan las aproximaciones realizadas para ajustar el modelo a una dimensión en condiciones de cargas membranales.

### 3.2.1. Mecánica de la fractura

Como punto de partida consideramos un laminado delgado, simétrico, balanceado con  $2N$  láminas y sometido a un estado uniaxial  $N_x$  exclusivamente, en el que todas las láminas son del

mismo material, pero orientadas respecto al eje  $x$  según la siguiente secuencia de apilamiento:  $[0_m/90_n/\pm\theta_r]_s$ , donde  $\theta < 45^\circ$ . Los resultados experimentales (Nairn, 2000; Nairn and Hu, 2004; J. Varna and Talreja, 1999, 2001; T. Yokozeki and Ishikawa, 2005) indican que, en dichos laminados, las láminas transversales desarrollan fisuras en la matriz tan pronto la tasa de liberación de energía en modo I a fractura,  $G_I$ , excede la tenacidad a fractura del material,  $G_{Ic}$ . Las fisuras comienzan como defectos internos dentro de las láminas transversales (láminas  $90_n$ ) y cuya propagación, crece primero de manera repentina (Barbero, 2011, section 7.2.1) buscando la intercara y una vez la carga aplicada  $N_x$  se incrementa, la fisura crece inestablemente en dirección paralela a las fibras, tal como se ilustra en la Figura 3.1.

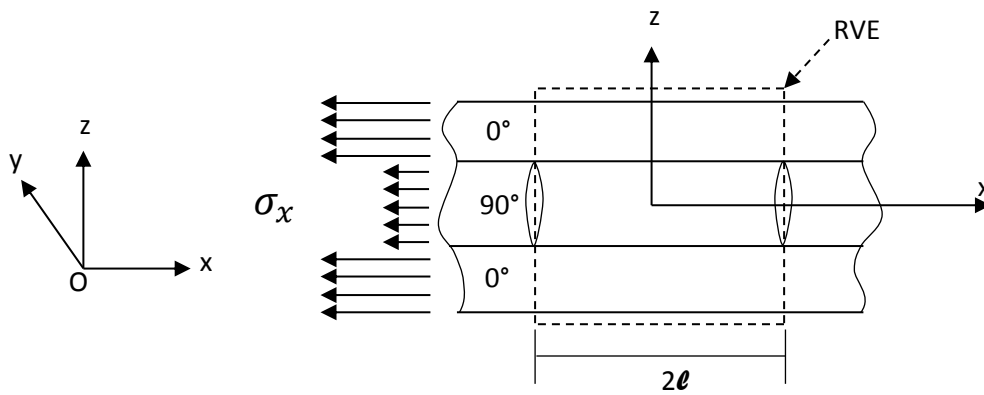


Figura 3.1: Mínima celda unidad representativa (RVE) con dimensiones  $2l \times 1 \times 2h$ , siendo  $2h$  el espesor del laminado.

Inicialmente, la distancia ( $2l$ ) entre fisuras no es equiespaciada aunque rápidamente converge a ésta, en cuanto la densidad de fisuras aumenta (Nairn and Hu, 2004; J. Varna and Talreja, 2001; T. Yokozeki and Ishikawa, 2005) ,y por lo tanto, es posible suponer una distribución uniforme de fisuras cuya distancia sea constante y nos permita usar una mínima celda unidad representativa (RVE) para analizar el problema. El RVE está formado por el espesor del laminado correspondiente a la parte simétrica, una unidad de longitud en dirección de las fibras de la lámina fisurada y una distancia  $2l$  entre dos fisuras existentes. En la Figura 3.1, se muestra el sistema de coordenadas elegido para nuestro RVE. La densidad de fisuras en cada lámina queda definida como:

$$\lambda_i = 1/2l \quad (3.1)$$

Para el análisis del modelo se supondrá que existe una densidad de fisuras muy pequeña en torno a  $\lambda_i = 0,01 \text{ mm}^{-1}$ , justificándose como una representación de defectos internos en el material a causa del proceso de fabricación. Además, las nuevas fisuras aparecerán a mitad del

camino entre las fisuras ya existentes, es decir, tan lejos como sea posible de la región de las tensiones intralaminas.

### 3.2.2. Cinemática de placas

Debido a la simetría de cargas, geométrica y propiedades del material con respecto al plano medio del laminado, solo es necesario analizar la mitad del laminado ( $N$  láminas). Como el laminado es delgado:

- I. Las líneas inicialmente normales a la superficie media, permanecen incompresibles ( $\varepsilon_z \simeq 0$ )
- II. Las líneas inicialmente rectas y perpendiculares dejan de serlo, debido al daño intralaminar que, producirá la aparición de teorías de alto orden ( $\gamma_{xz} \neq 0$ ).
- III. El desplazamiento  $w^0$  y los ángulos  $\phi_x^0, \phi_y^0$ , son nulos (deformaciones pequeñas e infinitesimales)

También se supondrá que trabajamos con láminas delgadas (espesor muy pequeño) y los esfuerzos que soportan se encuentran en el plano ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ). Bajo estas condiciones, supondremos un estado de tensión plana en dirección  $z$ :

$$\begin{aligned}\sigma_z^i &= 0 \\ w^i &= w^o = 0\end{aligned}\tag{3.2}$$

para todas las láminas  $i = 1 \dots N$ .

Como trabajamos con laminados simétricos y no se produce acoplamiento, tenemos simetría respecto al eje  $x$  e  $y$ :

$$\frac{\partial w^i}{\partial x} = \frac{\partial w^i}{\partial y} = 0\tag{3.3}$$

Si el laminado es muy largo en dirección  $y$  (deformación plana), entonces:

$$\frac{\partial (\ )^i}{\partial y} = 0\tag{3.4}$$

Si por el contrario, el laminado es muy estrecho en dirección  $y$  (tensión plana), entonces:

$$\sigma_y = 0\tag{3.5}$$

como sucede en teoría de vigas.

Para mejorar el modelo bajo las consideraciones descritas en la sección 3.1, analizaremos laminados simétricos con láminas balanceadas de la forma:  $[0_m/90_n/\pm\theta_r]_s$ . Las láminas  $[\pm\theta_r]$  las consideraremos a todos los efectos como láminas en dirección  $0^\circ$  pero con una rigidez reducida. Experimentalmente se ha demostrado (Nairn, 2000; Nairn and Hu, 2004; J. Varna and Talreja, 1999, 2001; T. Yokozeki and Ishikawa, 2005), que las láminas  $\pm\theta^\circ$  con direcciones  $\leq 45^\circ$ , apenas sufren fisuración cuando se encuentran junto a láminas a  $90^\circ$  y por tanto, el modelo sigue teniendo buena aproximación. En la Figura 3.2 se puede apreciar como ésto deja de ser válido para  $\pm\theta^\circ > 45^\circ$ . En conclusión, la exactitud del modelo dependerá de distintos factores:

- Para láminas muy próximas a ángulos  $\sim 90^\circ$ , el error cometido será mayor ya que el valor de la tenacidad a la fractura  $G_{Ic}$  desciende mucho y posibilita la aparición de fisuras.
- Es necesario que las láminas estén balanceadas en sus respectivas orientaciones para anular cargas y deformaciones fuera del plano unidimensional ( $\gamma_{xy}^o = 0$ ). Ejemplo:  $[0/+30/-30/90]_s \rightarrow [0/\pm 30/90]_s$ .

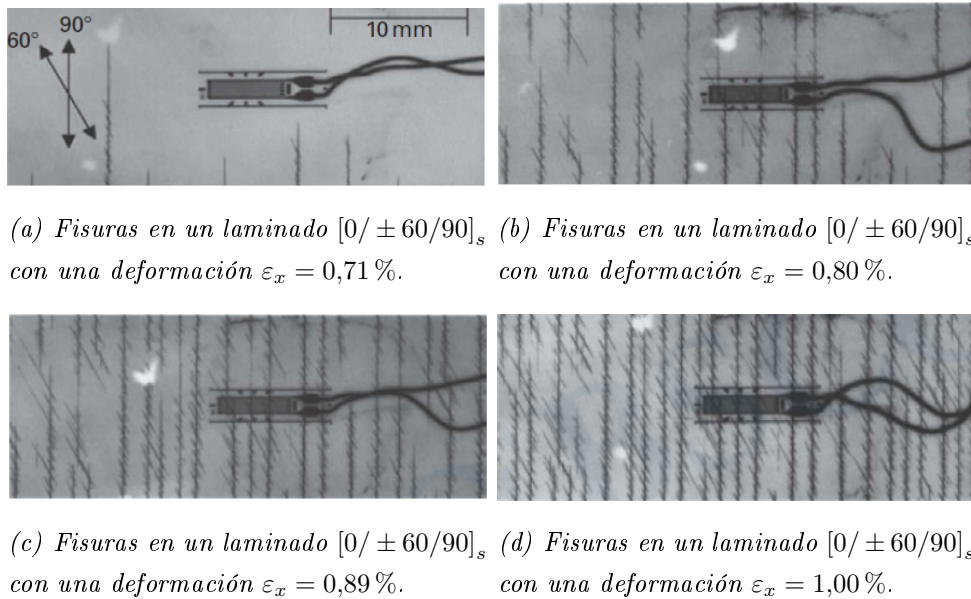


Figura 3.2: Fisuras transversales en la matriz, en laminados balanceados con ángulos de orientación mayores a  $45^\circ$  (Talreja, 1994).

Si analizamos laminados del tipo  $[0_m/90_n/\pm\theta_r]_s$  bajo un estado de cargas uniaxial  $\{N_x \neq 0, N_y = N_{xy} = M_x = M_y = M_{xy} = 0\}$ , el laminado cumple con la condición  $\gamma_{xy}^o = 0$ , sin embargo, las láminas  $\pm\theta^\circ$  al pasarlas a ejes locales, sí sufren tensiones de cortadura en el plano,

$$\tau_{12}^{\pm\theta} \neq 0.$$

Aunque estas tensiones en el plano  $\tau_{12}$  para una lámina  $+\theta$  son distintas de cero, para el caso de la lámina  $-\theta$ , sus tensiones son del mismo valor pero de signo opuesto, y por tanto, al utilizar laminados simétricos balanceados, estas deformaciones fuera del plano unidimensional se anulan y seguimos cumpliendo la condición  $\gamma_{xy}^o = 0$  para el laminado global. En estos casos, cada pareja de láminas balanceadas  $[\pm\theta_r]$ , es tratada como una única lámina. A partir de ahora definiremos la matriz de rigidez y el espesor de cada grupo de láminas  $[\pm\theta_r]$  como sigue:

$$Q^{(\pm\theta)} = \frac{1}{2} [Q^{+\theta} + Q^{-\theta}] \quad (3.6)$$

$$h^{(\pm\theta)} = h^{+\theta} + h^{-\theta} \quad (3.7)$$

Teniendo en cuenta todas las consideraciones anteriores, podemos decir que las únicas láminas que se fisuran en el interior del laminado son las láminas a  $90^\circ$  en presencia de láminas  $0^\circ$  y/o  $\pm\theta^\circ$ . Además, como en un laminado todas las láminas trabajan solidarias entre ellas, el campo de deformaciones de la superficie media coincide con el de cada lámina.

Por lo tanto, aplicando la teoría de pequeñas deformaciones desarrollamos la siguiente ecuación:

$$\gamma_{xy}^i = \frac{\partial u^i}{\partial y} + \frac{\partial v^i}{\partial x} = 0 \quad (3.8)$$

Para un estado de deformación plana, tomando la ecuación (3.4) en (3.8), el campo de desplazamientos en dirección transversal queda en función de  $z$ , es decir,  $v^i = v^i(z)$ . Para un estado de tensión plana, usando la ecuación (3.5) en (3.8), el campo de desplazamientos en dirección transversal queda en función de  $z$  e  $y$ , es decir,  $v^i = v^i(y, z)$ . También, como las fisuras en la matriz aparecen solo en las láminas transversales (con orientación  $\theta = 90^\circ$ ), el laminado presenta simetría con respecto al plano  $x$ - $z$  y de esta forma, aplicando de nuevo la teoría de pequeñas deformaciones, desarrollamos la siguiente ecuación:

$$\gamma_{yz}^i = \frac{\partial w^i}{\partial y} + \frac{\partial v^i}{\partial z} = 0 \quad (3.9)$$

Además, la longitud de las líneas que inicialmente son perpendiculares al plano medio permanecen constantes una vez se ha deformado el laminado, se cumple:



$$\varepsilon_z \simeq 0 \longrightarrow w(x, y, z) = 0 \quad (3.10)$$

Sustituyendo (3.4–3.5) para un estado de deformación/tensión plana en (3.8) y (3.9), reducimos el problema a un estado bidimensional (2D) cuya cinemática se presenta a continuación:

$$\begin{cases} u^i = u^i(x, z) = u_o(x) + u_1^i(x, z) \\ v^i = 0 \text{ (deformación plana)} \text{ o } v^i = v_o(y) \text{ (tensión plana)} \\ w^i = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

y la deformación en dirección  $x$  es:

$$\epsilon_x^i = \frac{\partial u^i}{\partial x} = \frac{\partial u_o(x)}{\partial x} + \frac{\partial u_1^i(x, z)}{\partial x} \quad (3.12)$$

donde  $u_o(x)$  es la solución homogénea fundamental y  $u_1^i(x, z)$  son las perturbaciones producidas por las fisuras intralaminares.

### 3.3. Ecuaciones constitutivas

A la hora de asignar mediante el subíndice  $k$  a la lámina que en ese momento se esta fisurando (láminas a  $90^\circ$  con respecto al eje  $x$ ), pueden presentarse los siguientes sucesos:

- Si varias láminas transversales se encuentran contiguas, se tomarán como una sola lámina con un espesor igual a la suma de sus espesores (Barbero and Cortes, 2010). El motivo se debe a que cuando aparece una fisura en el interior de una lámina, ésta crece inestablemente abarcando todo su espesor hasta toparse con las láminas adyacentes que en este caso son láminas con la mismas propiedades y orientaciones (láminas a  $90^\circ$ ), por tanto, al tener todas las láminas contiguas la misma tenacidad a fractura ( $G_{Ic}$ ), la fisura sigue propagándose abarcando un espesor igual a la suma de sus espesores o lo que es lo mismo, la fisura crece hasta toparse con láminas que tengan una tenacidad a fractura distinta.
- Si existe más de una lámina transversal no contiguas entre ellas, se analizarán de una en una aunque dichas láminas se fisuren a la vez. En ese caso, se asignará mediante el subíndice  $k$  a una de las láminas que se fisuran (o conjunto de láminas transversales contiguas sometidas a tracción con un espesor igual a la suma de sus espesores, es decir, considerando el conjunto como una única lámina) y el resto de láminas que se están fisurando, se supondrán en un primer cálculo que están libres de fisuración (intactas) y se les asignará mediante el subíndice  $m \neq k$ , que en ese momento son  $N - 1$  láminas. Una vez se haya

calculado la pérdida de rigidez de la lámina fisurada, pasamos a calcular mediante la mecánica del daño continuo la fisuración del resto de láminas, repitiendo el proceso con cada una de las láminas transversales que se fisuran hasta que la pérdida de rigidez del laminado converge y no se produce más fisuración.

Partiremos de la teoría de elasticidad tridimensional (3D) para obtener las ecuaciones constitutivas en cada lámina. Como las láminas unidireccionales se supondrán láminas ortótropas transversalmente isótropas, se tiene:

$$E_2 = E_3, \quad \nu_{31} = \nu_{21}, \quad G_{31} = G_{21} \quad (3.13)$$

Sustituyendo (3.13) en la matriz de flexibilidad para cada lámina  $i$ , se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \simeq 0 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & -\frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}}_{[S^i]} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Pasamos la matriz de flexibilidad a ejes globales del laminado aplicando las matrices de transformación  $[T(\theta)]^{(-1)}$  y  $[T(\theta)]^{(T)}$  (Barbero, 2011, Ch. 5.4.2) y de esta manera, obtenemos las ecuaciones constitutivas:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} = 0 \end{Bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^i; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} = 0 \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \bar{S}_{44} & \bar{S}_{45} \\ \bar{S}_{45} & \bar{S}_{55} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^i \quad (3.15)$$

donde  $\varepsilon_y = 0$  y  $\sigma_y \neq 0$  para un estado de deformación plana, y  $\sigma_y = 0$  y  $\varepsilon_y \neq 0$  para un estado de tensión plana. Las ecuaciones (3.15) son las ecuaciones constitutivas en el plano y fuera del plano de la lámina respectivamente. Además, se desprecian las tensiones fuera del plano en las condiciones de borde libre donde sí se producen irregularidades y aparecen tanto tensiones normales como tensiones de cortadura,  $\tau_{yz} \neq 0$ .

La ecuación constitutiva de una lámina  $i$ , expresada en el sistema de coordenadas de la lámina (s.c.local 1,2,3) y tomando la función promedio (3.27) a través del espesor, queda de la siguiente manera:

$$\hat{\sigma}_r^i = [Q_{rs}^i] (\hat{\epsilon}_s^i - \hat{\alpha}_s^i \Delta T); \quad r, s = 1, 2, 6 \quad (3.16)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de expansión térmica ( $CTE$ ),  $\Delta T$  es el incremento de temperatura y  $[Q_{rs}^i]$  es la matriz de rigidez de la lámina, posiblemente reducida debido a un daño previo y expresada en s.c de la lámina. Una vez conocida la densidad de fisuras ( $\lambda_k$ ) de la lámina  $k$  y la pérdida de rigidez del laminado  $[Q(\lambda)]$  ha sido calculada, podemos obtener la matriz de rigidez reducida  $[Q^k(\lambda)]$  de la lámina  $k$  como sigue:

$$[Q^k(\lambda)] h^k = [Q(\lambda)] h - \sum_{m=1}^N (1 - \delta_{mk}) [Q^m] h_m \quad (3.17)$$

donde  $\delta$  es la delta de Kronecker y  $h = \sum_{i=1}^N h_i$  es el espesor de la parte simétrica del laminado. Para facilitar la implementación en ordenador, se definen las siguientes variables de daño:

$$D_{ij}^k(\lambda_k) = 1 - Q_{ij}^k / \tilde{Q}_{ij}^k; \quad i = 1, 2, 6; \quad j = 2, 6 \quad (3.18)$$

donde  $\tilde{Q}_{ij}^k$  es la matriz de rigidez virgen de la lámina. De esta forma, la matriz de rigidez reducida de una lámina genérica puede calcularse fácilmente como sigue:

$$[Q^k] = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11}^k & (1 - D_{12})\tilde{Q}_{12}^k & 0 \\ (1 - D_{12})\tilde{Q}_{12}^k & (1 - D_{22})\tilde{Q}_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & (1 - D_{66})\tilde{Q}_{66}^k \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Basado en los datos experimentales (J. Varna and Talreja, 1999, 2001; Nairn, 2000; Nairn and Hu, 2004), las láminas a  $0^\circ$  y los grupos  $\pm\theta < 45^\circ$  (denotados por el subíndice  $m$ ), se supondrán láminas libres de fisuración una vez el laminado se encuentra sometido a cargas uniaxiales ( $N_x$ ). Las láminas a  $90^\circ$  (denotadas con el subíndice  $k$ ) serán consideradas como láminas que se fisuran cuando la tasa de liberación de energía a fractura en modo I, alcanza la tenacidad a fractura intralaminar  $G_{Ic}$ . Dicho de otro modo, la tenacidad a fractura  $G_{Ic}$  de las láminas  $i \neq k$  es mucho mayor que la de las láminas  $k$ , necesitando por tanto, una mayor energía para poder fisurarse la matriz.

Para un estado de deformación plana a lo largo de la dirección  $y$ , la ecuación (3.16) queda reducida a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_x &= \bar{Q}_{11}^i \hat{\epsilon}_x - (\hat{\alpha}_x^i \bar{Q}_{11}^i + \hat{\alpha}_y^i \bar{Q}_{12}^i) \Delta T \\ \hat{\sigma}_y &= \bar{Q}_{12}^i \hat{\epsilon}_x - (\hat{\alpha}_x^i \bar{Q}_{12}^i + \hat{\alpha}_y^i \bar{Q}_{22}^i) \Delta T\end{aligned}\quad (3.20)$$

donde  $\bar{Q}^i$  y  $\hat{\alpha}^i$  son, respectivamente, la matriz de rigidez de la lámina y el coeficiente de dilatación térmica, transformados al sistema de coordenadas global del laminado  $x, y$ .

Para un estado de tensión plana a lo largo de la dirección  $y$ , la ecuación (3.16) queda reducida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_x &= E_x^i (\hat{\epsilon}_x - \hat{\alpha}_x^i \Delta T) \\ \hat{\sigma}_y &= 0\end{aligned}\quad (3.21)$$

donde  $E_x^i$  es el módulo de elasticidad de la lamina  $i$  en el sistema de coordenadas del laminado y se puede expresar de la siguiente forma:

$$E_x^i = \bar{Q}_{11}^i - \frac{(\bar{Q}_{12}^i)^2}{\bar{Q}_{22}^i} \quad (3.22)$$

En la Figura 3.3, se representa un RVE genérico en 3D.

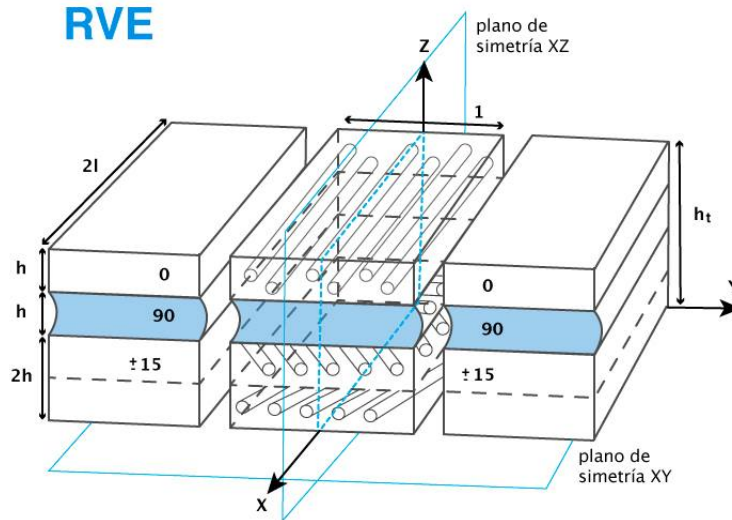


Figura 3.3: Mínima celda unidad representativa, RVE.

### 3.4. Tensiones de cortadura fuera del plano

Llegados a este punto se ha estudiado como se comporta el laminado en términos generales cuando está sometido a cargas uniaxiales en dirección  $x$ , se ha reducido el abanico de posibilidades constructivas a laminados del tipo  $[0_m/90_n/\pm\theta_r]_s$  bajo las consideraciones anteriormente mencionadas, se han despreciado efectos de borde que no sean la propia fisuración de la matriz en láminas a  $90^\circ$  y se han obtenido las ecuaciones constitutivas de cada lámina en ejes globales del laminado.

A partir de ahora, se estudiarán las perturbaciones provocadas por la fisuración intralaminar y las tensiones interlaminares que redistribuirán la pérdida de carga en el resto del laminado. Partiendo de la sección 3.3, se obtenía la ecuación constitutiva de la lámina (3.15) en ejes globales como sigue:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \bar{S}_{44} & \bar{S}_{45} \\ \bar{S}_{45} & \bar{S}_{55} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^i \quad (3.23)$$

Si tomamos la ecuación (3.23) y la analizamos para cada una de las láminas, uno obtiene:  $\bar{S}_{45} = \bar{S}_{54} = 0$  para las láminas  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , y  $\bar{S}_{45} = \bar{S}_{54} \neq 0$  para las láminas  $+\theta$  y  $-\theta$ . En estos casos, seguimos cumpliendo la ecuación (3.9) pero existen  $\tau_{yz} \neq 0$  que satisfacen la siguiente ecuación:

$$\bar{S}_{44}\tau_{yz} + \bar{S}_{45}\tau_{xz} = 0 \quad (3.24)$$

En este caso, no se puede reducir el modelo a una dimensión y se necesitaría estudiar un modelo en dos dimensiones (2D). Por este motivo, en la sección 3.3 analizábamos el grupo de láminas  $\pm\theta^\circ$  como una sola lámina bajo las condiciones (3.6) y (3.7) donde sí se cumple:  $\bar{S}_{45} = \bar{S}_{54} = \bar{S}_{16} = \bar{S}_{26} = 0$  para todas las láminas. Despejando de la ecuación (3.24), se tiene:

$$\bar{S}_{44}\tau_{yz} + \cancel{\bar{S}_{45}}\tau_{xz} = 0 \longrightarrow \tau_{yz} = 0 \quad (3.25)$$

Por tanto, la ecuación (3.23) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u^i}{\partial z} + \cancel{\frac{\partial w^i}{\partial x}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{44} & 0 \\ 0 & \bar{S}_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

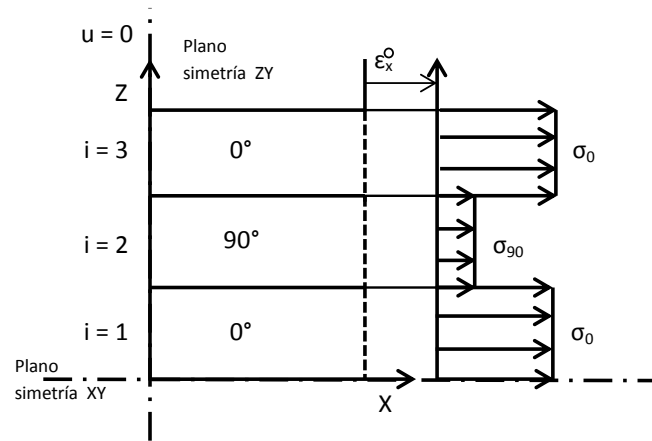
$$\boxed{\frac{\partial u^i}{\partial z} = \bar{S}_{55}^i \cdot \tau_{xz}^i} \quad (3.26)$$

donde se relaciona el campo de desplazamientos a lo largo del espesor de una lámina en función de la flexibilidad a cortadura  $\bar{S}_{55}^i$  del plano x-z. Estas tensiones a cortadura o perturbaciones  $\tau_{xz}$ , son las encargadas de distribuir los esfuerzos entre las láminas adyacentes cuando aparecen fisuras en el interior del laminado.

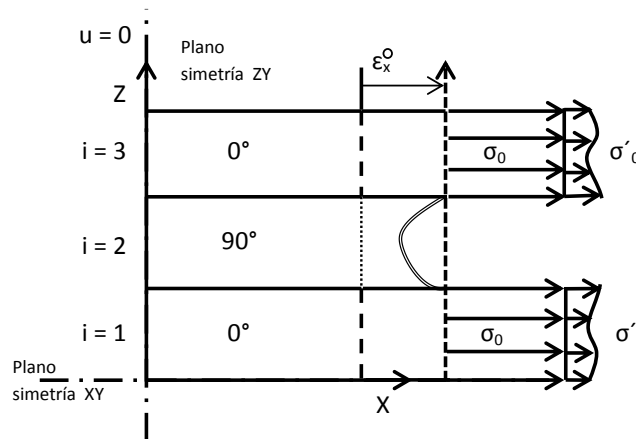
Para comprender mejor físicamente cómo varía el campo de desplazamientos a lo largo del espesor y cómo se distribuyen estas tensiones de cortadura entre las distintas láminas, analizaremos a modo de ejemplo un laminado cruzado sencillo. Imaginemos que tenemos un laminado  $[0/90/0]_s$  delgado, simétrico e inicialmente sin fisuras, tal como se ilustra en la Figura 3.4.a, el cual es sometido a un estado de cargas uniaxial  $\{N_x \neq 0, N_y = N_{xy} = M_x = M_y = M_{xy} = 0\}$  o un incremento de temperaturas  $\Delta T$ . El laminado experimentará los siguientes sucesos:

- En primer lugar, cuando un laminado se encuentra en ausencia de fisuras, el campo de deformaciones es constante en todas las láminas puesto que trabajan solidarias entre ellas debido al proceso de curado. El campo de desplazamientos es uniforme ( $u_o(x) = \varepsilon^o x$ ) con una deformación constante igual a  $\varepsilon^o$  y la distribución de tensiones en cada lámina, es constante a través del espesor y simétrica respecto al plano medio tal como se ilustra en la Figura 3.4.a. Debido a la diferencia de rigidez, las láminas a  $0^\circ$  al ser más rígidas que las de  $90^\circ$ , soportan más tensión. Para los casos en el que el laminado se encuentra intacto (no dañado), las tensiones interlaminares no son necesarias para satisfacer la continuidad de desplazamientos a través del espesor y a lo largo de la dirección x del laminado (CLT).
- Supongamos que al aplicar una carga  $N_x \neq 0$ , la tasa de liberación de energía es tal que  $G_I \geq G_{Ic}$  y aparece instantáneamente una fisura en la lámina transversal. En este caso, se genera una discontinuidad en el material y la superficie normal a la fisura pasa a ser una condición de borde libre donde  $\sigma_{90} = 0$ , y por tanto, deja de soportar tensión.
- Para mantener el equilibrio, la pérdida de carga de la lámina fisurada, es soportada por las láminas adyacentes cuya tensión se incrementa, tal como se ilustra en la Figura 3.4.b. En este ejemplo,  $k = 2$ .
- Esta redistribución de tensiones genera esfuerzos cortantes o también llamadas perturbaciones  $\tau_{xz}$ . En la Figura 3.4.b se puede ver cómo las láminas a  $0^\circ$  generan un esfuerzo cortante que tiran de la lámina  $90^\circ$  hacia adelante y viceversa. Aunque no sepamos la distribución de tensiones para las láminas  $i \neq k$ , si sabemos que la suma de estas nuevas distribuciones sobre el resto de láminas no fisuradas, es igual la tensión inicial  $\sigma_{90}$  que inicialmente soportaba la lámina  $k$  antes de fisurarse.

- Los incrementos de tensión  $\sigma'_0$  que soportan las láminas adyacentes no son conocidas a priori ni tampoco tienen por que ser constantes en cada lámina pero debido a la simetría del laminado, tienen que ser simétricas. De esta manera, es condición suficiente analizar solo la mitad del laminado puesto que se tienen en consideración todos los eventos (fisuras) que suceden en el laminado. La lámina  $k = 5$  esta también fisurada pero no participa en el análisis debido a la simetría. Además, la fisura presenta un punto de inflexión en su curvatura debido a la simetría con respecto a la línea media de la lámina fisurada.
- Finalmente, el desplazamiento final será aquél que cumpla con la condición de equilibrio en el laminado y las condiciones de equilibrio interno para cualquier elemento diferencial.



(a) Estado tensional para el laminado  $[0/90/0]_s$  según CLT.



(b) Estado tensional para el laminado  $[0/90/0]_s$  con fisuración intralaminar.

Figura 3.4: Estado tensional en condiciones ideales para el laminado  $[0/90/0]_s$  y la influencia de las perturbaciones generadas por la fisuración intralaminar.

Como la lámina fisurada deja de soportar carga en el extremo y está unida a las láminas adyacentes, es necesario la aparición de tensiones a cortadura  $\tau_{xz}$  que redistribuyan la pérdida de carga entre las láminas adyacentes y satisfagan la continuidad de desplazamientos en el interior del laminado. Aunque esta función es desconocida, supondremos una distribución lineal a lo largo del espesor. Los motivos son:

- Las tensiones  $\tau_{xz}$  tienen que ser nulas en la parte superior e inferior del RVE ya que dichas superficies son condiciones de borde libre. Además para el ejemplo analizado, debido a la simetría, la fisura a mitad del espesor no puede sufrir ningún giro y en consecuencia el cortante debe ser nulo. Es decir, todas las variables deben ser simétricas con respecto a la superficie media ( $\tau_{xz}^{(+)} = \tau_{xz}^{(-)}$ ) pero para satisfacer el equilibrio, las tensiones intralaminas deben tener signos opuestos en los lados de las intercaras ( $\tau_{xz}^{(+)} = -\tau_{xz}^{(-)}$ ) y por tanto, la tensión es nula en la superficie media del RVE.
- Para satisfacer el equilibrio en las láminas, las tensiones intralaminas deben tener signos opuestos en la parte superior e inferior de dicha lámina y por lo tanto, necesitamos una función impar para la distribución de tensiones intralaminas  $\tau_{xz}$  a lo largo del espesor. La función impar más simple es una distribución lineal como muestra en la Figura 3.5.
- Aunque existen distribuciones intralaminas de mayor orden (Cortes and Barbero, 2010), hemos escogido la más simple para llegar a una solución analítica lo mas sencilla posible.

En la Figura 3.5 se ilustra la distribución lineal de las tensiones a cortadura para el laminado  $[0/90/0]_s$  como posible solución. En este caso, las  $\tau_{xz}$  en las intercaras del laminado son de igual valor pero de signo contrario debido a la simetría del problema.

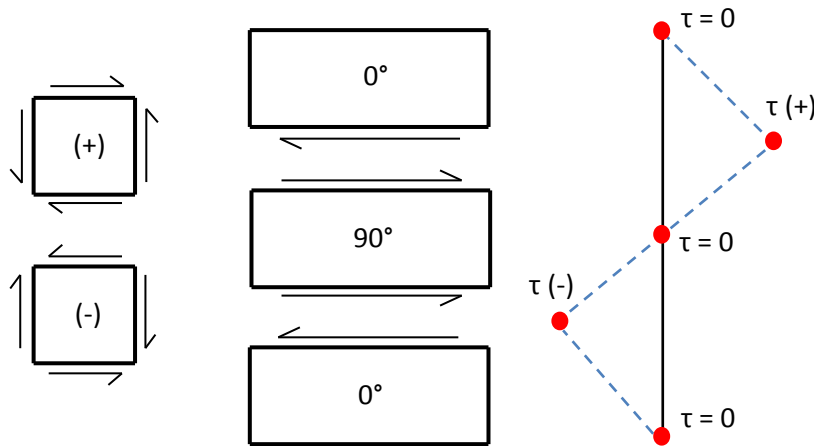


Figura 3.5: Distribución lineal de tensiones de cortadura  $\tau_{xz}$  para el laminado  $[0/90/0]_s$ .



Utilizando una distribución lineal como posible solución, los desplazamientos de cada lámina dejan de ser constantes y además, tienen que ser simétricos respecto al plano medio del laminado, por lo tanto, el campo de desplazamientos pasa a ser cuadrático. Como la solución de las ecuaciones de elasticidad para tal problema son intratables, se considerarán nuevas aproximaciones para reducir el problema a un estado unidimensional (1D) y obtener así, unos valores promediados para caractericen el comportamiento del laminado. Con este objetivo, se introducen las siguientes funciones matemáticas:

$$\hat{f} = \frac{1}{h_i} \int_{h_i} f dz \quad \text{función promedio} \quad (3.27)$$

$$\hat{f}' = \frac{1}{h_i} \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} f(z^{i,i+1} - z) dz \quad \text{función peso-promedio} \quad (3.28)$$

Estas funciones proporcionarán el valor promedio del desplazamiento de una lámina a lo largo del espesor y el desplazamiento promediado de una lámina respecto al desplazamiento de una de sus intercaras. En la Figura 3.6 vemos una distribución de desplazamientos aproximada (color rojo) para el laminado  $[0/90/0]_s$  donde se han obtenido dichos desplazamientos promediados para cada una de las láminas mediante las ecuaciones (3.27) y (3.28).

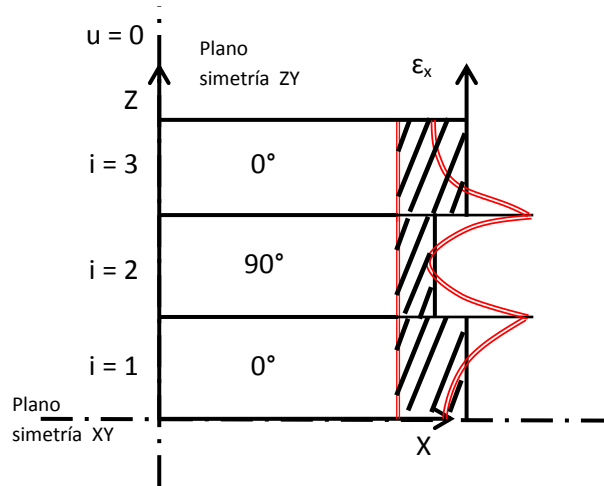


Figura 3.6: Distribución de desplazamientos aproximada para el laminado  $[0/90/0]_s$ .

Con el objetivo de obtener los desplazamientos promediados de cada una de las láminas, haremos uso de las funciones (3.27) y (3.28) en la ecuación (3.26) para obtener la diferencia de desplazamientos promediados ( $\hat{u}(x)$ ) en función de las tensiones de cortadura ( $\tau_{xz}^i$ ) y la matriz de flexibilidad intralaminar ( $\bar{S}$ ). Para ello, supongamos un laminado genérico tal como se ilustra

en la Figura 3.7,

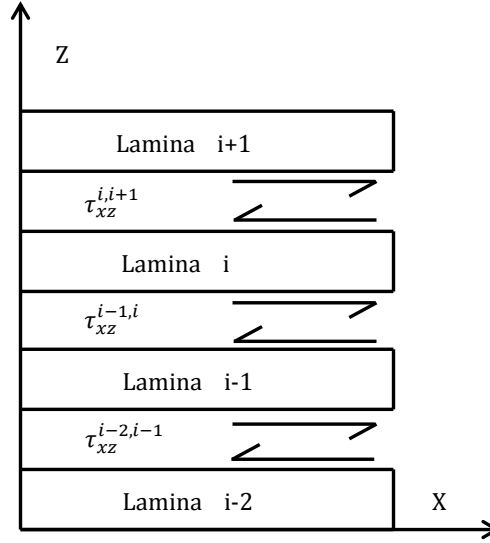


Figura 3.7: Tensiones interlaminares en las intercaras de un laminado genérico.

donde  $i$  es una lámina genérica dentro del laminado y las intercaras  $i, i + 1$  o  $i - 1, i$  son, respectivamente, las intercaras superior e inferior.

Consideremos el laminado genérico de la Figura 3.7 y un sistema de coordenadas como se ilustra en la Figura 3.8. La función intralaminar elegida es una distribución lineal como sigue:

$$\tau_{xz}^i(x, z) = \tau_{xz}^{i,i+1}(x) + [\tau_{xz}^{i-1,i}(x) - \tau_{xz}^{i,i+1}(x)] \frac{z^{i,i+1} - z}{h_i} \quad (3.29)$$

donde

$$z(0) = z^{i-1,i} \quad y \quad z(h_i) = z^{i,i+1}$$

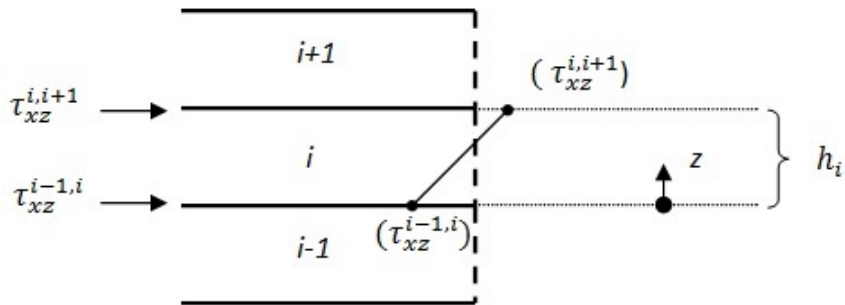


Figura 3.8: Sistema de coordenadas local de la lámina  $i$ .

Hay que tener en cuenta que tomando la distribución de tensiones intralaminas  $\tau_{xz}^i$  lineal (3.29), se produce una distribución de desplazamientos cuadráticos  $u_1^i(x, z)$ , también llamada solución perturbada. De esta manera, la ecuación (3.11) representa la cinemática de un laminado con una deformación cuadrática en cada lámina que satisface las condiciones de tensiones interlaminas nulas en las superficies superior e inferior de un laminado como se ilustró en la Figura 3.5.

Usando la función peso-promedio (3.28) en (3.26) con  $\tau_{xz}^i$  dada por (3.29), obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{h_i} \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} \frac{\partial u^i}{\partial z} (z^{i,i+1} - z) dz}_{1} &= \underbrace{\frac{1}{h_i} \bar{S}_{55}^i \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} \tau_{xz}^{i,i+1} (z^{i,i+1} - z) dz}_{2} + \\ &\underbrace{\frac{1}{h_i} \bar{S}_{55}^i \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} [\tau_{xz}^{i-1,i} - \tau_{xz}^{i,i+1}] \frac{(z^{i,i+1} - z)^2}{h_i} dz}_{3} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Desarrollando la ecuación (3.30.1), queda como:

$$\frac{1}{h_i} \left[ \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} \frac{\partial u^i}{\partial z} z^{i,i+1} dz - \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} \frac{\partial u^i}{\partial z} z dz \right]$$

Para resolver la ecuación (3.30.1), aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} u = z &\longrightarrow du = dz \\ \frac{\partial u^i}{\partial z} = v' &\longrightarrow v = u \end{aligned}$$

e integramos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_i} \left[ \cancel{z^{i,i+1} u(z^{i,i+1})} - z^{i,i+1} u(z^{i-1,i}) + z^{i-1,i} u(z^{i-1,i}) - \cancel{z^{i,i+1} u(z^{i,i+1})} \right] + \\ \underbrace{\frac{1}{h_i} \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} u dz}_{\text{Función promedio (3.27)}} \end{aligned}$$

Simplificando la ecuación anterior, queda como:

$$\frac{1}{h_i} \underbrace{[z^{i-1,i} - z^{i,i+1}]}_{-h_i} u(z^{i-1,i}) + \hat{u}(i)$$

$$\widehat{u}(i) - u(z^{i-1,i}) = \frac{\partial u^i}{\partial z} \quad (3.31)$$

donde  $\widehat{u}(i)$  es el desplazamiento promediado de la lámina  $i$  según la ecuación (3.27). De esta forma, reducimos el problema bidimensional (2D) a una dimensión (1D), donde las incógnitas  $\widehat{u}(i)$  son solo función de  $x$ .

De mismo modo que antes, partimos de la ecuación (3.30.2) y resolvemos la integral:

$$-\frac{\bar{S}_{55}^i}{h_i} \tau_{xz}^{i,i+1} \cdot \left[ \frac{(z^{i,i+1} - z)^2}{2} \right]_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} = \bar{S}_{55}^i \frac{h_i}{2} \tau_{xz}^{i,i+1} \quad (3.32)$$

Por último, integramos la ecuación (3.30.3):

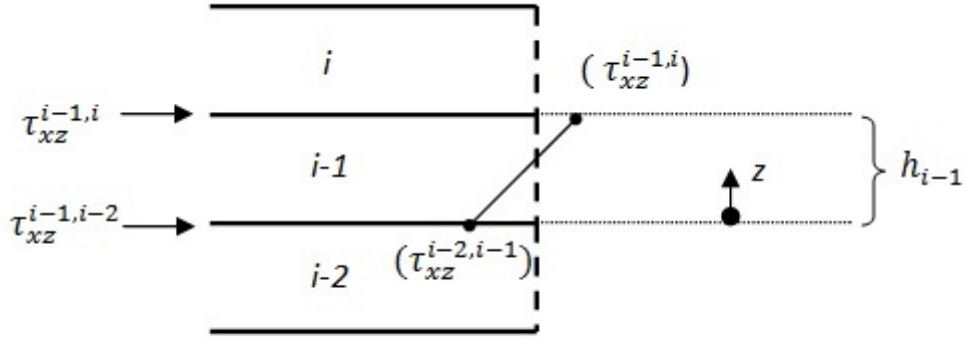
$$-\frac{\bar{S}_{55}^i}{h_i} \frac{[\tau_{xz}^{i-1,i} - \tau_{xz}^{i,i+1}]}{h_i} \cdot \left[ \frac{(z^{i,i+1} - z)^3}{3} \right]_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} = \bar{S}_{55}^i \frac{h_i}{3} [\tau_{xz}^{i-1,i} - \tau_{xz}^{i,i+1}] \quad (3.33)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.30) cada uno de los términos (3.31), (3.32) y (3.33), obtenemos finalmente el desplazamiento de la lámina  $i$  en función de la flexibilidad ( $\bar{S}_i$ ), el espesor de la lámina ( $h_i$ ) y las tensiones interlaminares ( $\tau_{xz}^{i-1,i}, \tau_{xz}^{i,i+1}$ ):

$$\widehat{u}(i) - u(z^{i-1,i}) = \bar{S}_{55}^i \frac{h_i}{2} \tau_{xz}^{i,i+1} + \bar{S}_{55}^i \frac{h_i}{3} [\tau_{xz}^{i-1,i} - \tau_{xz}^{i,i+1}] \quad (3.34)$$

De igual forma, obtenemos una ecuación similar para la lámina  $i - 1$ . El objetivo final es obtener dos ecuaciones que nos relacionen sus respectivos desplazamientos promediados con respecto a una misma intercara. De esta manera, operándolas, conseguimos una única ecuación capaz de relacionar los desplazamientos entre dos láminas consecutivas en función de las tensiones interlaminares adyacentes.

Para ello, se considera el sistema de coordenadas para la lámina  $i - 1$  tal como se ilustra en la Figura 3.9 y operaremos de la misma manera que antes, tomando la siguiente distribución lineal:


 Figura 3.9: Sistema de coordenadas local de la lámina  $i - 1$ .

$$\tau_{xz}^{i-1}(x, z) = \tau_{xz}^{i-2,i-1}(x) + [\tau_{xz}^{i-1,i}(x) - \tau_{xz}^{i-2,i-1}(x)] \frac{z - z^{i-2,i-1}}{h_{i-1}} \quad (3.35)$$

donde

$$z(0) = z^{i-2,i-1} \quad y \quad z(h_{i-1}) = z^{i-1,i}$$

Usando la función peso-promedio (3.28) en (3.26) con  $\tau_{xz}^i$  dada por (3.35), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \overbrace{\frac{1}{h_{i-1}} \int_{z^{i-2,i-1}}^{z^{i-1,i}} \frac{\partial u^{i-1}}{\partial z} (z - z^{i-2,i-1}) dz}^1 &= \overbrace{\frac{1}{h_{i-1}} \bar{S}_{55}^{i-1} \int_{z^{i-2,i-1}}^{z^{i-1,i}} \tau_{xz}^{i-2,i-1} (z - z^{i-2,i-1}) dz}^2 + \\ &\underbrace{\frac{1}{h_{i-1}} \bar{S}_{55}^{i-1} \int_{z^{i-2,i-1}}^{z^{i-1,i}} [\tau_{xz}^{i-1,i} - \tau_{xz}^{i-2,i-1}] \frac{(z - z^{i-2,i-1})^2}{h_{i-1}} dz}_3 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Desarrollamos la ecuación (3.36.1):

$$\frac{1}{h_i} \left[ \int_{z^{i-2,i-1}}^{z^{i-1,i}} \frac{\partial u^{i-1}}{\partial z} dz - \int_{z^{i-2,i-1}}^{z^{i-1,i}} \frac{\partial u^{i-1}}{\partial z} z^{i-2,i-1} dz \right]$$

Para resolver (3.36.1), aplicamos de nuevo el cambio de variable anterior, y nos queda:

$$\frac{1}{h_{i-1}} \left[ z^{i-1,i} u(z^{i-1,i}) - \cancel{z^{i-2,i-1} u(z^{i-2,i-1})} - z^{i-2,i-1} u(z^{i-1,i}) + \cancel{z^{i-2,i-1} u(z^{i-2,i-1})} \right] -$$

$$\underbrace{-\frac{1}{h_{i-1}} \int_{z^{i-2,i-1}}^{z^{i-1,i}} u \, dz}_{\text{Funcion promedio (3.27)}}$$

donde  $\widehat{u}(i-1)$  es el desplazamiento promediado de la lámina  $i-1$  según la ecuación (3.27). Simplificando la ecuación anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_{i-1}} \underbrace{[z^{i-1,i} - z^{i-2,i-1}]}_{h_{i-1}} u(z^{i-1,i}) - \widehat{u}(i-1) \\ u(z^{i-1,i}) - \widehat{u}(i-1) = \frac{\partial u_{i-1}}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Del mismo modo que antes, partiendo de la ecuación (3.36.2), resolvemos la integral:

$$\frac{\bar{S}_{55}^{i-1}}{h_{i-1}} \tau_{xz}^{i-2,i-1} \cdot \left[ \frac{(z - z^{i-2,i-1})^2}{2} \right]_{z^{i-2,i-1}}^{z^{i-1,i}} = \bar{S}_{55}^{i-1} \frac{h_{i-1}}{2} \tau_{xz}^{i-2,i-1} \quad (3.38)$$

Resolvemos e integramos la ecuación (3.36.3):

$$\frac{\bar{S}_{55}^{i-1}}{h_{i-1}} \cdot \frac{[\tau_{xz}^{i-1,i} - \tau_{xz}^{i-2,i-1}]}{h_{i-1}} \cdot \left[ \frac{(z - z^{i-2,i-1})^3}{3} \right]_{z^{i-2,i-1}}^{z^{i-1,i}} = \bar{S}_{55}^{i-1} \frac{h_{i-1}}{3} [\tau_{xz}^{i-1,i} - \tau_{xz}^{i-2,i-1}] \quad (3.39)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.36) cada uno de los términos (3.37), (3.38) y (3.39), obtenemos el desplazamiento de la lámina  $i-1$ :

$$u(z^{i-1,i}) - \widehat{u}(i-1) = \bar{S}_{55}^{i-1} \frac{h_{i-1}}{2} \tau_{xz}^{i-1,i-2} + \bar{S}_{55}^{i-1} \frac{h_{i-1}}{3} [\tau_{xz}^{i-1,i} - \tau_{xz}^{i-2,i-1}] \quad (3.40)$$

Aunque en ambos casos, la distribución de tensiones interlaminares varía linealmente, las ecuaciones (3.29) y (3.35) están definidas de distinta manera. La primera está definida de abajo-arriba y la segunda de arriba-abajo, de tal forma que los términos  $u(z^{i-1,i})$  se anulan al sumar las ecuaciones (3.34) y (3.40). Si operamos y simplificamos debidamente, llegamos al siguiente resultado:

$$\boxed{\widehat{u}(i) - \widehat{u}(i-1) = \tau_{xz}^{i,i+1} \bar{S}_{55}^i \frac{h_i}{6} + \tau_{xz}^{i-1,i} \left[ \bar{S}_{55}^i \frac{h_i}{3} + \bar{S}_{55}^{i-1} \frac{h_{i-1}}{3} \right] + \tau_{xz}^{i-2,i-1} \bar{S}_{55}^{i-1} \frac{h_{i-1}}{6}} \quad (3.41)$$

La ecuación (3.41) proporciona la diferencia de desplazamientos promediados entre dos láminas consecutivas en función de las tensiones interlaminares desde  $i = 2 \dots N$  siendo  $N$  el número de láminas que forma el RVE<sup>1</sup>. Como se mostró anteriormente en la Figura 3.5, las  $\tau_{xz}$  se anulan en los extremos del laminado.

Para obtener las  $\tau_{xz}$  en función de los desplazamientos promediados  $\hat{u}(i)$  de cada una de las láminas, primero organizamos todos los términos de las  $N - 1$  intercaras en forma matricial en función de la matriz  $[H]$  como sigue:

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}(2) - \hat{u}(1) \\ \hat{u}(3) - \hat{u}(2) \\ \vdots \\ \hat{u}(N) - \hat{u}(N-1) \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} \tau_{xz}^{1,2} \\ \tau_{xz}^{2,3} \\ \vdots \\ \tau_{xz}^{N-1,N} \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

donde  $[H]$  es una matriz de dimensiones  $(N - 1, N - 1)$  que almacena todos los coeficientes de la ecuación (3.41). Una vez obtenido el sistema matricial, lo se invierte:

$$\tau_{xz}^{i,i+1} = \sum_{j=1}^{N-1} H_{i,j}^{-1} [\hat{u}(j+1) - \hat{u}(j)] \quad (3.43)$$

El siguiente paso consiste en calcular la diferencia de tensiones interlaminares en función de la diferencia de desplazamientos promediados a través de las  $N + 1$  intercaras, incluyendo la superficie media del laminado y la superficie libre de abajo. La expresión en forma de serie resulta:

$$\tau_{xz}^{i,i+1} - \tau_{xz}^{i-1,i} = \sum_{j=1}^{N-1} [H_{i,j}^{-1} - H_{i-1,j}^{-1}] [\hat{u}(j+1) - \hat{u}(j)] \quad (3.44)$$

Para la primera lámina,  $i = 1$ ,  $\tau_{xz}^{0,1} = 0$  y  $H_{0,j} = 0$  en la superficie inferior del laminado porque es una superficie libre y para la superficie media del laminado,  $i = N$ ,  $\tau_{xz}^{N,N+1} = 0$  y  $H_{N+1,j} = 0$  debido a la simetría.

<sup>1</sup>El laminado consta de  $2N$  láminas. Al ser el laminado simétrico, bastará con estudiar  $i = 1 \dots N$  láminas.

### 3.5. Equilibrio

Llegados a este punto, se han determinado las tensiones interlaminares en función de los desplazamientos promediados de las láminas y se han obtenido las ecuaciones constitutivas de cada una de ellas. Con esta información podemos sustituir en las ecuaciones de equilibrio interno y obtener así, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con el fin de obtener los desplazamientos promediados en el laminado. Basado en las aproximaciones (3.5), (3.4), (3.29) y (3.35), las ecuaciones de equilibrio interno en 3D se reducen a 2D como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\sigma}_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial \hat{\tau}_{xy}}{\partial y}} + \frac{\tau_{xz}^{i,i+1} + \tau_{xz}^{i-1,i}}{hi} &= 0 \\ \frac{\partial \hat{\sigma}_y}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial \hat{\tau}_{xy}}{\partial x}} + \cancel{\frac{\tau_{yz}^{i,i+1} + \tau_{yz}^{i-1,i}}{hi}} &= 0 \\ \hat{\sigma}_z &= 0\end{aligned}$$

resultando finalmente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\tau_{xz}^{i,i+1} - \tau_{xz}^{i-1,i}}{hi} &= 0 \\ \hat{\sigma}_y &= C \\ \hat{\sigma}_z &= 0\end{aligned}\tag{3.45}$$

donde  $C = 0$  para tensión plana.

Resolviendo la ecuación (3.45) mediante las ecuaciones (3.44), (3.20) o (3.21) para cada una de las  $N$  láminas del RVE, se obtiene un sistema de  $N$  ecuaciones diferenciales con  $N$  desplazamientos promediados  $\hat{u}(i)$  como incógnitas. Para solucionar dicho sistema, es necesario resolver previamente un problema de autovalores y autovectores con el fin de desacoplarlo y establecer las condiciones de contorno necesarias. Si uno resuelve los desplazamientos promediados con (3.44) y (3.20), seremos capaces de obtener el primer elemento  $[A_{11}(\lambda)]$  de la matriz de rigidez 2D del laminado dañado. Dicho elemento, se puede expresar de la siguiente manera:

$$A_{11}(\lambda) = \frac{E_x(\lambda) h}{(1 - \nu_{12}(\lambda)\nu_{21}(\lambda))}\tag{3.46}$$

donde  $E_x(\lambda)$  es la degradación de rigidez del laminado para una densidad de fisuras  $\lambda_k$  y,  $\nu_{12}(\lambda)$  y  $\nu_{21}(\lambda)$  los coeficientes de Poisson del laminado dañado. Si queremos obtener la reducción de rigidez del laminado  $E_x(\lambda)$  necesitaríamos conocer los coeficientes de Poisson y para calcularlos, es necesario conocer el resto de elementos de la matriz de rigidez 2D del laminado dañado. Por



otra parte, si utilizamos la ecuación (3.21) en vez de la ecuación (3.20), obtenemos directamente la rigidez del laminado dañado como sucede en teoría de vigas. Por este motivo, de aquí en adelante utilizaremos la ecuación (3.21) para los cálculos sucesivos.

Desarrollando la ecuación (3.45) para cada una de las láminas de un laminado genérico y organizando cada uno de los términos en forma matricial, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{c} \tau_{xz}^{1,2} - \cancel{\tau_{xz}^{0,1}} \\ \tau_{xz}^{2,3} - \tau_{xz}^{1,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \cancel{\tau_{xz}^{N,N-1}} - \tau_{xz}^{N-1,N} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccc} [H_{1,1}^{-1}] & [H_{1,2}^{-1}] & \dots\dots & [H_{1,N-1}^{-1}] \\ [H_{2,1}^{-1} - H_{1,1}^{-1}] & [H_{2,2}^{-1} - H_{1,2}^{-1}] & \dots\dots & [H_{2,N-1}^{-1} - H_{1,N-1}^{-1}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [H_{N-1,1}^{-1} - H_{N-2,1}^{-1}] & [H_{N-1,2}^{-1} - H_{N-2,2}^{-1}] & \dots\dots & [H_{N-1,N-1}^{-1} - H_{N-2,N-1}^{-1}] \\ [-H_{N-1,1}^{-1}] & [-H_{N-1,1}^{-1}] & \dots\dots & [-H_{N-1,1N-1}^{-1}] \end{array} \right] \quad (3.47)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{u}(2) - \hat{u}(1) \\ \hat{u}(3) - \hat{u}(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{u}(N) - \hat{u}(N-1) \end{array} \right\}$$

Si sustituimos el sistema matricial (3.47) y las ecuaciones constitutivas (3.21), en las ecuaciones de equilibrio interno (3.45) para cada una de las láminas del laminado desde  $i = 1 \dots N$ , se tiene:

Lámina  $i = 1$ ,

$$\begin{aligned} E_x^i \frac{\partial^2 \hat{u}(1)}{\partial x^2} - \cancel{\frac{\partial (\hat{\alpha}_x^i \triangle T)}{\partial x}} + \frac{[-H_{1,1}^{-1}]}{h_i} \hat{u}(1) + \frac{[H_{1,i}^{-1} - H_{1,i+1}^{-1}]}{h_i} \hat{u}(2) + \dots + \\ + \frac{[H_{1,N-2}^{-1} - H_{1,N-1}^{-1}]}{h_i} \hat{u}(N-1) + \frac{[H_{1,N-1}^{-1}]}{h_i} \hat{u}(N) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Láminas  $i = 2 \dots N-1$ ,

$$\begin{aligned} E_x^i \frac{\partial^2 \hat{u}(i)}{\partial x^2} - \cancel{\frac{\partial (\hat{\alpha}_x^i \triangle T)}{\partial x}} + \frac{[H_{i-1,1}^{-1} - H_{i,1}^{-1}]}{h_i} \hat{u}(1) + \frac{[H_{i,1}^{-1} - H_{i-1,1}^{-1} - H_{i,2}^{-1} + H_{i-1,2}^{-1}]}{h_i} \hat{u}(2) + \\ + \dots + \frac{[H_{i,2}^{-1} - H_{i-1,2}^{-1} - H_{i,N-1}^{-1} + H_{i-1,N-1}^{-1}]}{h_i} \hat{u}(N-1) + \\ + \frac{[H_{i,N-1}^{-1} - H_{i-1,N-1}^{-1}]}{h_i} \hat{u}(N) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Lámina  $i = N$ ,

$$\begin{aligned} E_x^i \frac{\partial^2 \hat{u}(N)}{\partial x^2} - \cancel{\frac{\partial (\hat{\alpha}_x^i \triangle T)}{\partial x}} + \frac{[H_{i-1,1}^{-1}]}{h_i} \hat{u}(1) + \frac{[H_{i-1,2}^{-1} - H_{i-1,1}^{-1}]}{h_i} \hat{u}(2) + \dots + \\ + \frac{[H_{N-1,N-1}^{-1} - H_{N-1,N-2}^{-1}]}{h_i} \hat{u}(N-1) + \frac{[-H_{N-1,N-1}^{-1}]}{h_i} \hat{u}(N) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Reescribiendo las ecuaciones (3.48),(3.49) y (3.50) en un sistema matricial, nos queda un sistema de  $N$  ecuaciones diferenciales ordinarias como sigue:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E_x^1 & 0 & \cdots & 0 \\ & E_x^2 & 0 & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ \text{sim.} & & & E_x^N \end{bmatrix}}_{[M]} \begin{Bmatrix} \ddot{\hat{u}}(1) \\ \ddot{\hat{u}}(2) \\ \vdots \\ \ddot{\hat{u}}(N) \end{Bmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-H_{1,1}^{-1}}{h_1} & \frac{[H_{1,1}^{-1}-H_{1,2}^{-1}]}{h_1} & \cdots & \frac{[H_{1,N-2}^{-1}-H_{1,N-1}^{-1}]}{h_1} & \frac{-H_{1,N-1}^{-1}}{h_1} \\ \frac{[H_{1,1}^{-1}-H_{2,1}^{-1}]}{h_2} & \frac{[H_{2,1}^{-1}-H_{1,1}^{-1}-H_{2,2}^{-1}+H_{1,2}^{-1}]}{h_2} & \cdots & \frac{[H_{2,N-2}^{-1}-H_{1,N-2}^{-1}-H_{2,N-1}^{-1}+H_{1,N-1}^{-1}]}{h_2} & \frac{[H_{N-2,N-1}^{-1}-H_{N-3,N-1}^{-1}]}{h_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{[H_{N-2,1}^{-1}-H_{N-1,1}^{-1}]}{h_{N-1}} & \frac{[H_{N-1,1}^{-1}-H_{N-2,1}^{-1}-H_{N-1,2}^{-1}+H_{N-2,2}^{-1}]}{h_{N-1}} & \cdots & \frac{[H_{N-1,N-2}^{-1}-H_{N-2,N-2}^{-1}-H_{N-1,N-1}^{-1}+H_{N-2,N-1}^{-1}]}{h_{N-1}} & \frac{[H_{N-1,N-1}^{-1}-H_{N-2,N-1}^{-1}]}{h_{N-1}} \\ \frac{H_{N-1,1}^{-1}}{h_N} & \frac{[H_{N-1,N-2}^{-1}-H_{N-1,N-3}^{-1}]}{h_N} & \cdots & \frac{[H_{N-1,N-1}^{-1}-H_{N-1,N-2}^{-1}]}{h_N} & \frac{-H_{N-1,N-1}^{-1}}{h_N} \end{bmatrix}}_{[K]} \begin{Bmatrix} \hat{u}(1) \\ \hat{u}(2) \\ \vdots \\ \hat{u}(N) \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.51)$$

Sustituyendo  $\ddot{u}_i = \partial^2 \hat{u}(i) / \partial x^2$  en el sistema matricial anterior, la ecuación (3.51) se escribe como sigue:

$$[M] \{\ddot{u}_i\} + [K] \{u_i\} = 0 \quad (3.52)$$

### 3.5.1. Solución del sistema de ecuaciones diferenciales

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (3.52), tenemos que desacoplar el sistema y para ello operamos hasta resolver un problema de autovalores y autovectores. Los pasos son:

- Simplificamos el problema (3.52):

$$\{\ddot{u}_i\} + [D] \{u_i\} = 0 \quad (3.53)$$

donde  $[D]$  es  $[D] = [M]^{-1} [K]$ .

- Resolvemos el problema de autovalores y autovectores:

$$[D] = [V] [\lambda] [V]^{-1} \quad (3.54)$$

donde  $[D]$  esta escrito en función de la matriz de autovalores  $[\lambda]$  y la matriz columna de autovectores  $[V]$ .

- Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{cases} \{Z\} = [V]^{-1} \{u_i\} \\ \{\dot{Z}\} = [V]^{-1} \{\dot{u}_i\} \\ \{\ddot{Z}\} = [V]^{-1} \{\ddot{u}_i\} \end{cases} \quad (3.55)$$

para obtener la siguiente expresión,

$$[V]^{-1} \{\ddot{u}_i\} + [\lambda] [V]^{-1} \{u_i\} = 0$$

y finalmente desacoplamos el sistema de ecuaciones diferenciales como sigue:

$$\{\ddot{Z}_i\} + [\lambda] \{Z_i\} = 0 \quad (3.56)$$

donde  $[\lambda]$  es una matriz diagonal.

La solución exacta al sistema de ecuaciones (3.56) tiene la forma:

$$Z_i = r_i \exp(x\sqrt{-\lambda_i}) + s_i \exp(-x\sqrt{-\lambda_i}) \quad (3.57)$$

donde  $\lambda_i$  son los autovalores desde  $i = 1 \dots N$  y  $r_i, s_i$ , son las constantes a calcular en función de las condiciones de contorno. Si desacemos el cambio de variable, los desplazamientos promediados de cada una de las láminas se puede escribir como una combinación lineal de la siguiente manera:

$$\hat{u}_i = \sum_{j=1}^N V_{ij} Z_j \quad (3.58)$$

que desarrollada queda así,

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{(1)} \\ \hat{u}_{(2)} \\ \vdots \\ \hat{u}_{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{1,1} \\ V_{2,1} \\ \vdots \\ V_{N,1} \end{pmatrix} Z_1 + \begin{pmatrix} V_{1,2} \\ V_{2,2} \\ \vdots \\ V_{N,2} \end{pmatrix} Z_2 + \cdots + \begin{pmatrix} V_{1,N} \\ V_{2,N} \\ \vdots \\ V_{N,N} \end{pmatrix} Z_N \quad (3.59)$$

Tomando como origen de coordenadas el centro de la mínima celda unidad representativa (RVE), tal como se ilustra en la Figura 3.1, existe simetría en el plano  $y$ - $z$  y por lo tanto, para que se cumpla la condición de simetría, se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(x=0) = 0 &\rightarrow Z_i(x=0) = 0; \quad i = 1, \dots, N \\ s_i &= -r_i \end{aligned} \quad (3.60)$$

La solución exacta a la ecuación (3.57) queda:

$$Z_i = r_i \left( \exp(x\sqrt{-\lambda_i}) - \exp(-x\sqrt{-\lambda_i}) \right) \quad (3.61)$$

Si analizamos la matriz  $[\lambda]$  de autovalores, resulta que todos los valores son negativos, es decir, es una matriz definida negativa y de esta manera, la ecuación (3.61) puede escribirse como sigue:

$$Z_i = p_i \sinh(x\sqrt{-\lambda_i}); \quad i = 1 \dots N \quad (3.62)$$

donde  $p_i = 2r_i$ .

La ecuación (3.62) implica que los desplazamientos promediados  $\hat{u}_i$  en (3.58) son un sumatorio de funciones hiperbólicas. Los resultados numéricos confirman que para cada caso analizado, una de esas funciones hiperbólicas representa una deformación homogénea y el resto, son perturbaciones que corrigen la solución cerca del extremo de la fisura, es decir, en  $x = \pm l$ . Para describir una deformación homogénea  $u_o(x)$  mediante un seno hiperbólico, es necesario trabajar en un dominio de los reales muy cercano al cero y por lo tanto, uno de los autovalores debe ser extremadamente pequeño en la ecuación (3.62). De esta manera, el  $\sinh$  se aproxima a una función casi lineal en el rango:  $-\ell < x < \ell$ . En los resultados arrojados para este modelo sometido a cargas membranales, se demuestra que uno de los autovalores es casi nulo,  $\lambda_s \simeq O(-18)$ .

Los valores que arroja un  $\sinh$  al trabajar con un autovalor muy pequeño para producir una función casi lineal, proporciona valores de órdenes de magnitud muy bajos, y por tanto, necesi-

tamos una constante  $p_i$  que sea lo suficientemente grande como para recuperar la deformación homogénea. Esta pareja autovalor/constante muy pequeña y grande respectivamente, produce problemas numéricos y para solucionar ésto, la deformación homogénea se puede aproximar a una función lineal  $Z_s = \varepsilon_x^o x$  mediante un autovalor nulo ( $\lambda_s = 0$ ). Por tanto, se propone sustituir la ecuación (3.58) por la siguiente expresión:

$$\hat{u}_i = \sum_{j=1}^N (1 - \delta_{js}) V_{ij} Z_j + \varepsilon_x^o x \quad (3.63)$$

que expandida queda así,

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_{(1)} \\ \hat{u}_{(2)} \\ \vdots \\ \hat{u}_{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{1,1} \\ V_{2,1} \\ \vdots \\ V_{N,1} \end{Bmatrix} Z_1 + \begin{Bmatrix} V_{1,2} \\ V_{2,2} \\ \vdots \\ V_{N,2} \end{Bmatrix} Z_2 + \cdots + \begin{Bmatrix} V_{1,N-1} \\ V_{2,N-1} \\ \vdots \\ V_{N,N-1} \end{Bmatrix} Z_{N-1} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_x^o \\ \vdots \\ \varepsilon_x^o \end{Bmatrix} x \quad (3.64)$$

donde  $\varepsilon_x^o$  es una deformación constante correspondiente a la deformación homogénea. De hecho,  $\varepsilon_x^o$  es la deformación del plano medio del laminado que sería calculado con teoría clásica de laminados (*CLT*) para un laminado no dañado, pero en este trabajo,  $\varepsilon_x^o$  es calculada resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales (3.56) y usando las condiciones de contorno de la sección 3.5.2 para cada una de las densidades de fisuras  $\lambda_k$ .

### 3.5.2. Condiciones de contorno

Para resolver el problema de contorno de nuestro RVE y obtener así, los coeficientes  $p_i$  y  $\varepsilon_x^o$  que determinan los desplazamientos  $\widehat{u}(i)$  de cada una de las láminas, necesitamos  $N$  condiciones de contorno. En función del estado de carga al que esté sometido el laminado, podemos obtener la degradación de rigidez ( $E_x(\lambda)$ ) o el coeficiente de dilatación térmica ( $\alpha_{CTE}(\lambda)$ ).

Para cualquiera de los dos casos anteriores, necesitamos  $N - 2$  condiciones de contorno que corresponden con la deformación homogénea de nuestro RVE. Como las láminas trabajan solidarias entre ellas, el desplazamiento en  $x = \pm l$  para todas las láminas ( $i \neq k$ ) debe ser el mismo. En la realidad, solo las intercaras entre láminas tienen el mismo desplazamiento aunque al utilizar las ecuaciones (3.27) y (3.28), el desplazamiento  $\widehat{u}_i$  a lo largo del espesor permanece constante como se muestra en la Figura 3.6. Solo la lámina fisurada sufre un desplazamiento menor desde un punto de vista micro (RVE).

Por tanto, para que el contorno de nuestro RVE sea compatible con el resto del laminado (macro), el desplazamiento promediado de todas las láminas excepto la fisurada, debe ser el mismo. La condición de contorno queda como:

$$\boxed{\widehat{u}_r(l) = \widehat{u}_m(l); \quad \forall m \neq k} \quad (3.65)$$

donde  $r$  es la primera lámina ( $i \neq k$ ) que se toma como referencia. En la implementación por ordenador,  $r = 1$  si la primera lámina no está fisurada, y si no  $r = 2$  correspondiéndose con la siguiente lámina.

#### (a) Condiciones de carga $\{\widehat{\sigma}_x = 1, \Delta T = 0\}$

Para obtener la degradación del laminado bajo un estado de carga  $\{N_x \neq 0, N_y = N_{xy} = M_x = M_y = M_{xy} = 0 \text{ y } \Delta T = 0\}$  se utilizan las dos últimas condiciones de contorno:

- Condición de tensión libre en la cara fisurada

La lámina fisurada  $k$ , que presenta una discontinuidad en  $x = \pm l$  como se muestra en la Figura 3.1, no soporta tensión en dirección normal a la cara fisurada. Esta condición de borde queda:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \widehat{\sigma}_x^k(l) dy = 0 \quad (3.66)$$

donde el límite de integración representa un RVE que tiene una longitud unidad en dirección  $y$ , es decir, en dirección de las fibras de la lámina fisurada. Usando las ecuaciones (3.12) y (3.21),

se obtiene:

$$E_x^k \int_{-1/2}^{1/2} \left( \frac{\partial \hat{u}_k(l)}{\partial x} - \hat{\sigma}_x^k \triangle T \right) dy = 0$$

que simplificada resulta,

$$\boxed{\dot{\hat{u}}_k(l) = \dot{\hat{u}}_k(-l) = 0} \quad (3.67)$$

■ Condición de equilibrio bajo cargas externas

La carga uniaxial en dirección  $x$ , será soportada por todas las láminas que no se fisuren (grupos  $0^\circ$  y/o  $\pm\theta^\circ$ ). Aplicando equilibrio de fuerzas se tiene:

$$\sum_{i=1}^N (1 - \delta_{ik}) h_i \int_{-1/2}^{1/2} \hat{\sigma}_x^i(l) dy = N_x = h \hat{\sigma}_x \quad (3.68)$$

donde  $h = \sum_{i=1}^N h_i$  es el espesor de la parte simétrica del laminado,  $k$  es la lámina fisurada,  $\delta$  es la delta de Kronecker, y  $\hat{\sigma}_x$ , sin el superíndice, es la tensión promediada aplicada al laminado. Usando las ecuaciones (3.12) y (3.21), resulta:

$$\sum_{i=1}^N (1 - \delta_{ik}) h_i E_x^i \int_{-1/2}^{1/2} \left( \frac{\partial \hat{u}_i(l)}{\partial x} - \hat{\sigma}_x^i \triangle T \right) dy = h \hat{\sigma}_x \quad (3.69)$$

que simplificada queda como:

$$\boxed{\sum_{i=1}^N (1 - \delta_{ik}) h_i E_x^i \dot{\hat{u}}_i(l) = h \hat{\sigma}_x} \quad (3.70)$$

Téngase en cuenta que macroscópicamente, la lámina fisurada sigue soportando carga aunque parte haya sido transferida al resto de las láminas no fisuradas mediante las tensiones interlaminares en la cercanía de la fisura.

**(b) Condiciones de carga  $\{\hat{\sigma}_x = 0, \triangle T = 1\}$**

Para obtener el coeficiente global de expansión térmica bajo un estado de carga  $\{N_x = N_y = N_{xy} = M_x = M_y = M_{xy} = 0 \text{ y } \triangle T = 1\}$  se utiliza de nuevo las condiciones de contorno anteriores:



- Condición de tensión libre en la cara fisurada

De nuevo, la lámina fisurada  $k$ , que presenta una discontinuidad en  $x = \pm l$  como muestra la Figura 3.1, no soporta tensión. Esta condición de borde queda:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \hat{\sigma}_x^k(l) dy = 0 \quad (3.71)$$

donde el límite de integración representa un RVE que tiene una longitud de valor unidad en dirección  $y$ . Usando las ecuaciones (3.12) y (3.21), obtenemos la siguiente expresión:

$$E_x^k \int_{-1/2}^{1/2} \left( \frac{\partial \hat{u}_k(l)}{\partial x} - \hat{\alpha}_x^k \triangle T \right) dy = 0$$

que simplificada resulta,

$$\boxed{\hat{u}_k(l) = \hat{u}_k(-l) = \hat{\alpha}_x^k \triangle T} \quad (3.72)$$

- Condición de equilibrio bajo cargas externas

Ahora la carga uniaxial es nula en dirección  $x$  y aplicando equilibrio de fuerzas, queda como:

$$\sum_{i=1}^N (1 - \delta_{ik}) h_i \int_{-1/2}^{1/2} \hat{\sigma}_x^i(l) dy = 0 \quad (3.73)$$

donde  $h = \sum_{i=1}^N h_i$  es el espesor de la parte simétrica del laminado,  $k$  es la lámina fisurada y  $\delta$  es la delta de Kronecker. Usando las ecuaciones (3.12) y (3.21), se tiene:

$$\sum_{i=1}^N (1 - \delta_{ik}) h_i E_x^i \int_{-1/2}^{1/2} \left( \frac{\partial \hat{u}_i(l)}{\partial x} - \hat{\alpha}_x^i \triangle T \right) dy = 0 \quad (3.74)$$

la cual simplificada queda como:

$$\boxed{\sum_{i=1}^N (1 - \delta_{ik}) h_i E_x^i \hat{u}_i(l) = \sum_{i=1}^N (1 - \delta_{ik}) h_i E_x^i \hat{\alpha}_x^i \triangle T} \quad (3.75)$$

### 3.6. Degradación de rigidez del laminado

Por último, calcularemos la pérdida de rigidez del laminado ( $E_x(\lambda) = [A(\lambda)]/h$ ) dada una densidad de fisuras ( $\lambda$ ) y una tensión aplicada ( $\widehat{\sigma}_x$ ). En este caso,  $[A(\lambda)]$  es la matriz de rigidez del laminado dañado ya homogeneizado y  $h$ , la parte simétrica del laminado. La ecuación constitutiva es:

$$\{\widehat{N}_r\} = [A_{rs}(\lambda)] \{\widehat{\varepsilon}_s - \alpha_{CTEs}(\lambda) \Delta T\}; \quad r, s = x, y, z \quad (3.76)$$

donde  $\widehat{N}_r$  está definida por unidad de longitud y  $\widehat{\alpha}_{CTEs}(\lambda)$  es la constante de dilatación térmica del laminado dañado. Tanto la matriz de rigidez como la constante CTE del laminado, están definidas en ejes globales.

Para la resolución del problema se siguen los siguientes pasos:

- a) Se plantea el sistema de ecuaciones diferenciales (3.52) para una densidad de fisuras ( $\lambda$ ).
- b) Se resuelve el sistema mediante el cambio de variable (3.55) para obtener la solución al problema (3.63).
- c) Se utilizan las condiciones de contorno (3.65) y las condiciones de carga  $\{\widehat{\sigma}_x = 1, \Delta T = 0\}$  para obtener los desplazamientos promediados  $\widehat{u}_i$ .

Finalmente, se calcula la deformación promediada del laminado  $\widehat{\varepsilon}_x$  mediante la ecuación (3.27) como sigue:

$$\widehat{\varepsilon}_x = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{\partial \widehat{u}_m}{\partial x} dx = \frac{\widehat{u}_m(l) - \widehat{u}_m(-l)}{2l} = \frac{\widehat{u}_m(l)}{l} \quad (3.77)$$

Hay que tener en cuenta que los desplazamientos promediados  $\widehat{u}_m(l)$  para todas las láminas  $m \neq k$ , son iguales ya que nuestro RVE tiene que ser compatible con el resto del laminado, es decir,  $\widehat{u}_m(l)$  es un desplazamiento homogeneizado que contiene las particularidades a nivel micro, y por tanto, las perturbaciones debidas a la fisuración. Una vez se calcula la deformación  $\widehat{\varepsilon}_x$ , despejamos de la ecuación (3.76) para  $\{\Delta T = 0\}$  y operamos con la ecuación (3.5), resultando:

$$\{\widehat{N}_x\} = [A_{11}(\lambda)] \{\widehat{\varepsilon}_x\} + [A_{12}(\lambda)] \{\widehat{\varepsilon}_y\} \quad (3.78)$$

$$0 = [A_{12}(\lambda)] \{\widehat{\varepsilon}_x\} + [A_{22}(\lambda)] \{\widehat{\varepsilon}_y\} \quad (3.79)$$

despejando de la ecuación (3.79), obtenemos

$$\{\widehat{\varepsilon}_y\} = -\frac{[A_{12}(\lambda)]}{[A_{22}(\lambda)]}\{\widehat{\varepsilon}_x\} \quad (3.80)$$

y sustituyendo la ecuación (3.80) en (3.78), resulta:

$$\{\widehat{\sigma}_x\} = \{\widehat{N}_x\} \frac{1}{h} = \frac{1}{h} \underbrace{\left( [A_{11}(\lambda)] - \frac{[A_{12}(\lambda)]^2}{[A_{22}(\lambda)]} \right)}_{E_x(\lambda)} \{\widehat{\varepsilon}_x\} \quad (3.81)$$

Por último, sustituyendo el estado de cargas  $\{\widehat{\sigma}_x = 1\}$ , despejamos la pérdida de rigidez como sigue:

$$E_x(\lambda) = \frac{1}{\widehat{\varepsilon}_x} = \frac{l}{\widehat{u}_m(l)} \quad (3.82)$$

### 3.7. Constante de dilatación térmica (CTE) del laminado

Calcular el CTE del laminado es similar a calcular la degradación de la rigidez bajo unas condiciones de carga distintas. La ecuación constitutiva es:

$$\{\widehat{N}_r\} = [A_{rs}(\lambda)] \{\widehat{\varepsilon}_s - \alpha_{CTEs}(\lambda) \Delta T\}; \quad r, s = x, y, z \quad (3.83)$$

donde  $\widehat{N}_r$  está definida por unidad de longitud y  $\alpha_{CTEs}(\lambda)$  es la constante de dilatación térmica del laminado dañado. Tanto la matriz de rigidez como la constante CTE del laminado, están definidas en ejes globales.

De la misma manera que antes, se siguen los siguientes pasos para la resolución del problema:

- a) Se plantea el sistema de ecuaciones diferenciales (3.52) para una densidad de fisuras ( $\lambda$ ).
- b) Se resuelve el sistema mediante el cambio de variable (3.55) para obtener la solución al problema (3.63).
- c) Se plantea las condiciones de contorno (3.65) y condiciones de carga  $\{\widehat{\sigma}_x = 0, \Delta T = 1\}$  para obtener los desplazamientos promediados  $\widehat{u}_i$ .

Una vez se ha obtenido la deformación promediada del laminado mediante la ecuación (3.77), se despeja la pérdida de rigidez de la ecuación (3.83) bajo el estado de cargas  $\{\widehat{\sigma}_x = 0, \Delta T = 1\}$  y operamos de la misma manera que en la sección anterior:

$$0 = E_x(\lambda) \{ \widehat{\varepsilon}_x - \alpha_{CTEx}(\lambda) 1 \} \quad (3.84)$$

donde el CTE del laminado resulta:

$$\alpha_{CTEx}(\lambda) = \widehat{\varepsilon}_x = \frac{\widehat{u}_m(l)}{l} \quad (3.85)$$

Otra manera de calcular el  $\alpha_{CTE}(\lambda)$  del laminado, es usando la pérdida de rigidez  $E_x(\lambda)$  calculada en la sección 3.6 sin necesidad de volver a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales. En este caso, se calcula la pérdida de rigidez en condiciones de membrana mediante la mecánica del daño continuo de la siguiente manera:

$$E_x^k(\lambda) = \frac{h}{h_k} \left[ E_x(\lambda) - \sum_{i=1}^m E_x^m \frac{h_m}{h} \right] \quad (3.86)$$

Una vez ha sido calculada la pérdida de rigidez de la lámina fisurada  $E_x^k(\lambda)$ , resolvemos la carga térmica equivalente como sigue:

$$N^T = \Delta T \sum_{i=1}^N E_x^i \{ \alpha_x^i \} h_i \quad (3.87)$$

Al ser el estado de cargas  $\{ \widehat{\sigma}_x = 0, \Delta T = 1 \}$ , la deformación que sufre el laminado se debe únicamente a una expansión térmica. En ese caso, trataremos el laminado como un sólido homogéneo donde el CTE se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$\alpha_{CTEx}(\lambda) = \frac{1}{\Delta T} [E_x(\lambda) h_i]^{-1} \{ N^T \} \quad (3.88)$$

## Capítulo 4

# Solución analítica en laminados con fisuras en la matriz. Flexión pura

En este capítulo se presenta un modelo analítico unidimensional para laminados balanceados, no necesariamente simétricos, sometidos a flexión pura en los que actualmente, apenas se han desarrollado de forma analítica. Por lo general, los laminados compuestos se diseñan para que trabajen en su plano al ser más eficientes, pero muchas veces se encuentran sometidos a ambos estados de carga (en membrana y flexión), siendo necesario estudiar el daño del laminado en ambas condiciones.

En algunos casos, la deformación por flexión no es tan importante al ser de un orden de magnitud mucho menor que el estado uniaxial, pero en otros muchos es necesario el estudio de ambos estados. Un grave problema de este estado de cargas son las tensiones interlaminares, que debido a los esfuerzos de corte en la viga o placa que se producen en el interior del laminado, favorecen la deslaminación.

La fisuración en la matriz de laminados sujetos a flexión, se analiza (Adolfsson and Gudmundson, 1997, 1999) usando una correcta analogía entre laminados y medios ortótropos. Esta metodología generalizada (Adumitroaie and Barbero, 2014) tiene el inconveniente de que necesita un estudio previo por elementos finitos (*FEA*) y por tanto, la aplicabilidad de dicho modelo queda restringida solo a aquellos materiales en los que se ha realizado un estudio paramétrico por elementos finitos. También se ha desarrollado algún modelo a flexión para vigas en una dimensión (Smith and Ogin, 2000, 1999) para laminados del tipo  $[0/90]_s$  en los cuales solo se permite la fisuración de una única lámina a  $90^\circ$ . En otros modelos realizados (S. Li and Soden, 1993, 1994, 1998), se supone un estado de deformación plana generalizada para obtener una solución semi-analítica, es decir, analítica en una dirección y, con elementos finitos en la otra.

Tanto los modelos con solución aproximada en forma de serie, como los modelos numéricos, requieren de experimentos o soluciones analíticas para poder validarlos. Uno de los grandes problemas es que los datos experimentales ya existentes, están limitados a unas poquísimas configuraciones y es muy difícil medir datos experimentales, por ejemplo, como sucede en laminados con fibra de carbono. Por este motivo, las soluciones analíticas pueden utilizarse como puntos de referencia aunque se encuentren en un estado de tensión/deformación plana.

El modelo en condiciones de flexión pura presentado en este capítulo, se desarrolló partiendo de la idea de reducir los problemas a una dimensión como en el modelo anterior y cuya motivación, se debe principalmente a los escasos modelos que se han desarrollado hasta ahora. Hasta tal punto, que no se han encontrado datos experimentales o estudios por elementos finitos fiables con los que comparar los resultados.

El modelo presentado en este capítulo proporciona una solución analítica, exacta y cerrada, para laminados sometidos a flexión en un estado unidimensional, considerando un estado de tensión plana. Además, nos permitirá obtener valores aproximados sobre su comportamiento, comprender mejor el fenómeno físico que hay detrás y mejorar el proceso de convergencia para el cálculo del daño definitivo en el laminado, mediante la resolución de EDO's como sucedía en el modelo anterior.

Gran parte de los pasos a seguir son iguales, o muy parecidos, respecto al modelo del capítulo anterior, pero con algunas peculiaridades o nuevas condiciones a tener en cuenta. Finalmente se implementa un programa en MATLAB R2013 para obtener los resultados del modelo y analizarlos, que se junta en este proyecto en el anexo A.2.

## 4.1. Aproximaciones

Para el desarrollo de una solución analítica en laminados trabajando a flexión con fisuras en la matriz, es necesario reducir el problema tridimensional (3D) a una dimensión (1D) mediante una serie de aproximaciones. Éstas son principalmente: considerar las laminas balanceadas como una única lámina equivalente; suponer un estado de tensión plana como sucede en teoría de viga; dividir las láminas en subláminas para aumentar la exactitud de las tensiones intra/interlaminares y calcular el máximo valor intralaminar existente, el cual es un factor muy importante para predecir la deslaminación. Al igual que en el capítulo anterior, describiremos las condiciones necesarias para que se produzca la formación de fisuras, definiremos el RVE y

la cinemática de placas para un laminado sometido a flexión pura.

#### 4.1.1. Mecánica de la fractura

Como punto de partida consideramos un laminado delgado, balanceado con  $2N$  láminas y sujeto a flexión pura  $M_x$ . Todas las láminas son del mismo material pero orientadas con respecto al eje  $x$  según la secuencia de apilamiento  $[0_m/90_n/\pm\theta_r]_S$ , donde  $\theta < 45^\circ$ . Los datos experimentales (Nairn, 2000; Nairn and Hu, 2004; J. Varna and Talreja, 1999, 2001; T. Yokozeki and Ishikawa, 2005; Adolfsson and Gudmundson, 1997, 1999) indican que en dichos laminados, las láminas transversales desarrollan fisuras en la matriz, tan pronto la tasa de liberación de energía en modo I,  $G_I$ , excede la tenacidad a fractura intralaminar del material  $G_{Ic}$ . Las fisuras comienzan como defectos internos (láminas  $90_n$ ) y se propagan inestablemente a través del espesor (Barbero, 2011, sección 7.2.1) hasta que se encuentran rápidamente con las intercaras. Tan pronto se incremente la carga aplicada  $M_x$  o la curvatura  $\kappa_x$ , el espesor de la fisura crece de nuevo inestablemente en dirección paralela a las fibras, tal como se ilustra en la Figura 4.1.

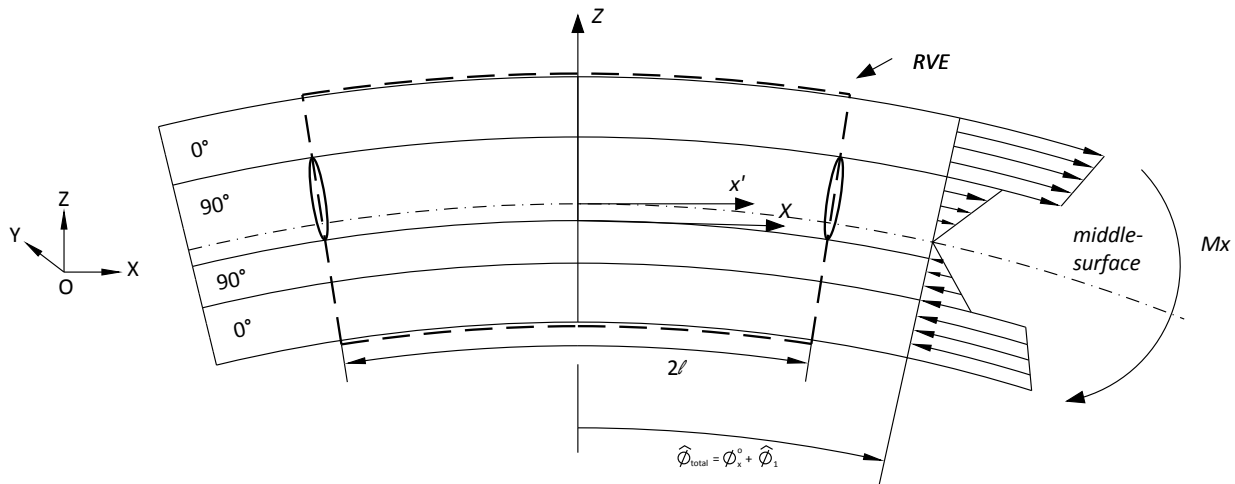


Figura 4.1: Mínima celda unidad representativa (RVE) con dimensiones  $2\ell \times 1 \times h$ , donde  $h$  es el espesor de todo el laminado.

Cuando el laminado sufre una curvatura, sólo las láminas que experimentan tensión a tracción desarrollan fisuras en su interior que crecen paralelas en dirección a las fibras. Si la lámina fisurada coincide con la superficie media del laminado, el espesor de la fisura se expande exclusivamente a la zona sometida a tracción. En este caso, la lámina transversal es dividida en dos láminas, una fisurada (zona a tracción) y otra virgen (zona a compresión).

Inicialmente las fisuras no están equiespaciadas, pero tan pronto crece la densidad de fisuras, esta hipótesis es válida. Dicha aproximación, como sucedió en el capítulo anterior, nos permite

suponer una distribución uniforme de fisuras que permita utilizar una mínima celda unidad representativa (RVE) para analizar el problema eficientemente. El RVE queda definido por el espesor del laminado, una unidad de longitud en dirección de la fibras de las láminas fisuradas y un arco de longitud  $2\ell$  entre dos fisuras existentes. La densidad de fisuras en cada lámina se define como:

$$\lambda_i = 1/2\ell \quad (4.1)$$

Para el análisis del modelo, se supondrá que existe una densidad de fisuras muy pequeña en torno a  $\lambda_i = 0,01 \text{ mm}^{-1}$ , justificándose como una representación de defectos internos en el material, a causa del proceso de fabricación. Además, las nuevas fisuras aparecerán a mitad de camino entre las fisuras ya existentes, es decir, tan lejos como sea posible de la región de las tensiones intralaminares. El origen del sistema de coordenadas global del RVE, se sitúa a mitad de las dos fisuras como se muestra en la Figura 4.1.

#### 4.1.2. Cinemática de placas

En este trabajo se analizan los laminados del tipo  $[0_m/90_n/\pm\theta_r]$ , no necesariamente simétricos e incluso si el laminado no dañado (libre de fisuras) es inicialmente simétrico, deja de serlo como consecuencia de que solo las láminas transversales sometidas a tracción sufren fisuración y por tanto, una vez aplicada la carga se pierde la simetría. Además, la curvatura que sufre el laminado es antimétrica con una deformación positiva en la parte superior y una deformación negativa en la parte inferior con respecto al plano medio. En resumen, debido a la antimetría de deformación y a las propiedades del material con respecto al plano medio, *todo* el laminado (con  $N$  láminas) necesita ser analizado. Como el laminado es delgado:

- I. Las líneas inicialmente rectas y normales a la superficie media del laminado, permanecen incompresibles ( $\epsilon_z \simeq 0$ )
- II. Debido al daño intralaminar, se consideran teorías de alto orden para representar la deformación real de la viga y en consecuencia, las líneas inicialmente rectas y normales a la superficie media, dejan de serlo ( $\gamma_{xz} \neq 0$ )
- III. La deflexión  $w^0$  y los ángulos  $\phi_x^0$  dejan de ser pequeños y hay que tomarlos en consideración. Además, el laminado sigue siendo simétrico con respecto al plano  $z-y$  (Fig. 4.1)y



por lo tanto se puede escribir:

$$\frac{\partial w^0}{\partial y} = 0 \longrightarrow \phi_y^0 = 0 \quad (4.2)$$

Se supondrá un estado de tensión plana para todas las láminas desde  $i = 1 \dots N$ , como sigue:

$$\sigma_z^i = 0 \quad (4.3)$$

Además, como el laminado es muy estrecho en la dirección  $y$ , se considerará un estado de tensión plana, es decir, la longitud es mucho mayor que en las otras dos dimensiones (ancho y canto) como sucede en teoría de vigas:

$$\sigma_y^i = 0 \quad (4.4)$$

Por otro lado, como el laminado está compuesto por láminas unidireccionales con una secuencia de apilamiento  $[0_m/90_n/+15_r/-15_r]$ , las componentes  $D_{16}$  y  $D_{26}$  son distintas de cero, pero dichos valores (acoplamiento flexión-tracción) decrece muy rápidamente con el incremento de  $r$ . De esta forma, cada pareja de láminas  $(+15/-15)_r$  se agrupará como un par  $[\pm\theta]_r$ , al igual que sucedía en la sección 3.2.2, tratándola como una única lámina cuya rigidez es:

$$[Q] = \frac{1}{2}(Q^\theta + Q^{-\theta}) \quad (4.5)$$

Los laminados se considerarán balanceados de la forma:  $[0_m/90_n/\pm\theta_r]_s$ , en la que no existe acoplamiento entre la normal y los efectos de cortadura, es decir,  $\gamma_{xy}^0 = \kappa_{xy}^i = 0$ . Por lo tanto, aplicando la teoría de pequeñas deformaciones se tiene:

$$\gamma_{xy}^i = \frac{\partial u^i}{\partial y} + \frac{\partial v^i}{\partial x} = 0 \quad (4.6)$$

Para un estado de tensión plana (4.4), tomando la ecuación (4.6), el campo de desplazamiento en dirección transversal nos queda en función de  $z$  e  $y$ , es decir,  $v^i = v^i(y, z)$ . Como las fisuras en la matriz aparecen solo en las láminas transversales sometidas a tracción (con orientación  $\theta = 90^\circ$ ), el laminado presenta simetría con respecto al plano  $x$ - $z$  y de esta forma, aplicando de nuevo la teoría de pequeñas deformaciones, desarrollamos la siguiente ecuación:

$$\gamma_{yz}^i = \frac{\partial w^i}{\partial y} + \frac{\partial v^i}{\partial z} = 0 \quad (4.7)$$

$$\gamma_{xz}^i = \frac{\partial u^i}{\partial z} - \phi_x^0 \quad (4.8)$$

Tomando la ecuación (4.4) para un estado de tensión plana y la ecuación (4.7), la cinemática del problema inicial (3D), se reduce a un estado bidimensional como sigue:

$$\begin{cases} u^i = u^i(x, z) = -z \frac{\partial w^o(x)}{\partial x} + u_1^i(x, z) = z \phi_x^o(x) + u_1^i(x, z) \\ v^i = v^o(y) \\ w^i = w^o(x) \end{cases} \quad (4.9)$$

donde  $\phi_x^o(x)$  es la solución homogénea fundamental y  $u_1^i(x, z)$  son las perturbaciones producidas por las fisuras intralaminares.

El campo de deformaciones en cada lámina del laminado puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} = 0 \end{Bmatrix}^i = \begin{Bmatrix} 0 \\ \epsilon_y^o \\ 0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \phi_x^o \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1^i(x, z)}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

donde

$$\epsilon_x^i = \frac{\partial u^i}{\partial x} = z \frac{\partial \phi_x^o(x)}{\partial x} + \frac{\partial u_1^i(x, z)}{\partial x} \quad (4.11)$$

y el efecto de Poisson  $\epsilon_y^i = \epsilon_y^o$  se considera constante y despreciable.

## 4.2. Ecuaciones constitutivas

A la hora de asignar mediante el subíndice  $k$  a la lámina transversal que en ese momento se está fisurando (láminas a  $90^\circ$  sometidas a tracción), pueden presentarse los siguientes casos:

- Si varias láminas transversales se encuentran contiguas y sometidas a un estado de tracción, se tomarán como una sola lámina cuyo espesor será igual a la suma de sus espesores (Barbero and Cortes, 2010). Como se comentó en el capítulo anterior, cuando una fisura aparece en el interior de una lámina, ésta crece inestablemente abarcando un espesor igual

a la suma de sus espesores o, lo que es lo mismo, hasta toparse con láminas que tengan distintas propiedades, es decir, que tengan una tenacidad a fractura ( $G_{Ic}$ ) distinta.

- Si existe más de una lámina transversal no contigua sometida a tracción, se analizará de una en una aunque se fisuren a la vez. Primero, se asigna mediante el subíndice  $k$  a una de las láminas (o conjunto de láminas transversales contiguas sometidas a tracción con un espesor igual a la suma de sus espesores, es decir, considerando el conjunto como una única lámina) que en ese momento se están fisurando y el resto de láminas que también se fisuren en ese instante, se le asignará el subíndice  $m \neq k$  siendo  $N - 1$  láminas del laminado, es decir, se supondrán en un primer cálculo libres de fisuración o intactas. Una vez se haya calculado la pérdida de rigidez de la lámina fisurada mediante la mecánica del daño continuo, se calcula la fisuración del resto de láminas transversales sometidas a tracción que también se fisuren, repitiendo el proceso hasta que converge y no se produce más fisuración en el laminado.

Las ecuaciones constitutivas de cada una de las láminas del laminado en ejes globales son:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} = 0 \end{Bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^i; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} = 0 \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \bar{S}_{44} & \bar{S}_{45} \\ \bar{S}_{45} & \bar{S}_{55} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^i \quad (4.12)$$

donde  $\sigma_y = 0$  y  $\epsilon_y \neq 0$  para un estado de tensión plana a lo largo de la dirección  $y$ , para todas las láminas  $i = 1 \dots N$ . Conviene destacar que cada pareja balanceada  $\pm\theta$  es tratada como una única lámina que tiene las mismas propiedades que una lámina a  $\theta^\circ$  excepto que  $\bar{S}_{16} = \bar{S}_{26} = \bar{S}_{45} = 0$  (ver (4.5) y sección 3.3). Por tanto, el problema tiene simetría con respecto al plano  $x$ - $z$ , y como resultado  $\tau_{yz}^i = 0$ . Usando la ecuación (4.8) y (4.12), se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial u^i(x, z)}{\partial z} - \phi_x^o = \bar{S}_{55}^i \tau_{xz}^i} \quad (4.13)$$

La ecuación constitutiva de una lámina  $i$ , expresada en el sistema de coordenadas de la lámina (s.c.local 1,2,3) e invirtiendo la ecuación (4.12), queda:

$$\sigma_r^i = [Q_{rs}^i] (\epsilon_s^i - \alpha_s^i \Delta T); \quad r, s = 1, 2, 6 \quad (4.14)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica (CTE),  $\Delta T$  es el incremento de temperatura y  $[Q_{rs}^i]$  es la matriz de rigidez de una lámina genérica  $i$ , posiblemente reducida debido a un daño

previo y expresada en el sistema de coordenadas de la lámina. Una vez conocida la densidad de fisuras ( $\lambda_k$ ) en la lámina  $k$ , y se ha calculado la matriz de reducción de rigidez del laminado ( $[Q(\lambda)]$ ), se puede calcular la matriz de rigidez reducida ( $[Q^k(\lambda)]$ ) de la lámina  $k$  como sigue:

$$[Q^k(\lambda)] h^k = [Q(\lambda)] h - \sum_{m=1}^N (1 - \delta_{mk}) [Q^m] h_m \quad (4.15)$$

donde  $\delta$  es la delta de Kronecker y  $h = \sum_{i=1}^N h_i$  es el espesor del laminado. Para facilitar la implementación por ordenador, se definen las siguientes variables de daño:

$$D_{ij}^k(\lambda_k) = 1 - Q_{ij}^k / \tilde{Q}_{ij}^k; \quad i = 1, 2, 6; \quad j = 2, 6 \quad (4.16)$$

donde  $\tilde{Q}_{ij}^k$  es la matriz de rigidez virgen de la lámina. De esta forma, la pérdida de rigidez de cualquier lámina dañada puede ser fácilmente calculada como:

$$[Q^k] = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11}^k & (1 - D_{12})\tilde{Q}_{12}^k & 0 \\ (1 - D_{12})\tilde{Q}_{12}^k & (1 - D_{22})\tilde{Q}_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & (1 - D_{66})\tilde{Q}_{66}^k \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Basado en los datos experimentales (J. Varna and Talreja, 1999, 2001; Nairn, 2000; Nairn and Hu, 2004), las láminas a  $0^\circ$ , las láminas transversales sujetas a tensión de compresión y grupos  $\pm\theta < 45^\circ$  (denotados con el subíndice  $m$ ), están libres de fisuración cuando el laminado se encuentra sometido a un momento ( $M_x$ ) exclusivamente. Las láminas a  $90^\circ$  sometidas a tracción (denotadas por el subíndice  $k$ ), se fisuran cuando la tasa de liberación de energía a fractura en modo I,  $G_I$ , alcanza la tenacidad a fractura,  $G_{Ic}$ .

Aunque el laminado originalmente intacto (no dañado) sea simétrico, la fisuración a la que se ve sometido cuando se le aplica un momento  $M_x$ , produce asimetría (eje  $y$ ) en el laminado provocando un acoplamiento extensión-flexión que aparece cuando usamos el sistema de coordenadas original ( $x', y, z$ ). Para reducir el problema a un estado unidimensional (1D) y evitar tener que trabajar con la matriz de acoplamiento, calcularemos la nueva fibra neutra, en la que no existe acoplamiento. Por lo tanto, usando las aproximaciones de teoría de vigas (4.4) y la ecuación (4.5), las ecuaciones constitutivas del laminado (Barbero, 2011, 10.2.1), *no libre de fisuras* (una vez está dañado con fisuras en las láminas transversales sometidas a tracción), pueden ser simplificadas como sigue:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & 0 \\ & \alpha_{22} & 0 & \beta_{12} & \beta_{22} & 0 \\ & & \alpha_{66} & 0 & 0 & \beta_{66} \\ & & & \delta_{11} & \delta_{12} & 0 \\ & & & & \delta_{22} & 0 \\ sym. & & & & & \delta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y = 0 \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y = 0 \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

donde  $N_x, N_y$  y  $N_{xy}$  son las fuerzas normales y de cortadura por unidad de longitud en los lados con unidades [N/m];  $M_x, M_y$  y  $M_{xy}$  son los momentos por unidad de longitud en los lados, con unidades [N] tomando como momento positivo una deformación cóncava mirando desde el eje  $z$  negativo (Figura 4.1);  $\epsilon_x^o, \epsilon_y^o$ , y  $\epsilon_{xy}^o$  son las deformaciones del plano medio, y  $\kappa_x, \kappa_y$  y  $\kappa_{xy}$  las curvaturas. En este caso  $\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \beta_{1,3}, \beta_{2,3}$  y  $\delta_{1,3}, \delta_{2,3}$  son nulos al ser laminados balanceados y utilizar la ecuación (4.5). Para obtener la ecuación (4.18), utilizamos el modelo a sollicitación en membrana del capítulo anterior calculando, primero, la pérdida de rigidez del laminado y después, la pérdida de rigidez de la lámina fisurada para obtener, finalmente, la matriz de rigidez del laminado dañado.

La matriz en (4.18) es la inversa de la matriz del laminado  $ABD$  (Barbero, 2011, Ch. 6.16) teniendo en cuenta un estado de tensión plana (4.4), con la reducción de rigidez  $[Q^k(\lambda)]$  de la lámina  $k$  calculada para la densidad de fisuras actual  $\lambda$ , usando la ecuación (4.17) (Barbero, 2011, Ch. 8). De esta forma, la matriz en (4.18) considera el acoplamiento extensión-flexión, incluso si el laminado no dañado era simétrico antes de fisurarse ya que, una vez fisurado, el laminado deja de ser simétrico.

Invirtiendo la ecuación (4.18) y reorganizando los términos, la ecuación constitutiva de una lámina en una viga de tipo laminado se convierte (ver (Barbero, 2011, Ch. 10)) en:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \kappa_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i & 0 & 0 \\ B_i & D_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_i & C_i \\ 0 & 0 & C_i & H_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ N_{xy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

donde  $A_i$  es la rigidez axial,  $B_i$  representa el acoplamiento entre flexión y cargas en el plano,  $D_i$  es la rigidez a flexión,  $H_i$  es la rigidez a torsión,  $F_i$  es la rigidez a cortadura en el plano y  $C_i$  es el acoplamiento entre la curvatura de torsión y la cizalladura. En caso de sollicitación a

flexión, la posición del eje neutro vendría dado por:

$$e_b = \frac{B_i}{A_i} \quad (4.20)$$

La excentricidad  $e_b$  desplaza el sistema de coordenadas original desacoplando la flexión y las cargas en el plano y nos permite obtener una nueva fibra neutra o superficie media para la cual  $B_i = 0$ . Una vez conocida la posición del eje neutro (4.20), la nueva coordenada  $z$  de cada una de las interfaces se puede calcular restando  $e_b$  a la coordenada  $z$  original de las interfaces entre láminas, obteniendo así un nuevo sistema de coordenadas  $(x, y, z)$ . Si la lámina fisurada coincidiera con la nueva superficie media del laminado, calculada anteriormente mediante  $e_b$ , la lámina se dividirá en otras dos láminas de diferentes espesores de tal manera que la fisura se extiende hasta el eje neutro, ver Figura 4.1.

Para un estado de tensión plana a lo largo de la dirección  $y$ , la ecuación (4.14) de teoría de vigas queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E_x^i(\epsilon_x - \alpha_x^i \Delta T) \\ \hat{\sigma}_y &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde  $\alpha^i$  y  $E_x^i$  son, respectivamente, el coeficiente de expansión térmica y el módulo de elasticidad de la lámina  $i$  en el sistema de coordenadas  $x, y, z$ , pudiéndose expresar de la siguiente manera:

$$E_x^i = \bar{Q}_{11}^i - \frac{(\bar{Q}_{12}^i)^2}{\bar{Q}_{22}^i} \quad (4.22)$$

donde  $\bar{Q}_{ij}^i$  es la rigidez de la lámina  $i$  transformada al s.c. del laminado. Sustituyendo la ecuación (4.11) en (4.21), se obtiene:

$$\sigma_x = E_x^i \left( z_i \frac{\partial \phi_x^o(x)}{\partial x} + \frac{\partial u_1^i(x, z)}{\partial x} - \alpha_x^i \Delta T \right) \quad (4.23)$$

### 4.3. Tensiones de cortadura fuera del plano

La ecuación que nos relaciona el momento y la curvatura en una viga de tipo laminado es:

$$\kappa_x = \frac{M_x}{(EI)} = \delta_{11} M_x \quad (4.24)$$

donde  $(EI)$  es la rigidez a flexión (Barbero, 2011, Ch. 10) y  $\delta_{11}$  es la inversa de la rigidez dada por:

$$\delta_{11} = \left[ \frac{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}{D_{22}} \right]^{-1} \quad (4.25)$$

En teoría clásica de laminados (CLT), la curvatura está relacionada con el ángulo de giro por la siguiente expresión (Barbero, 2011, Ch. 6):

$$\kappa_x = \frac{\partial \phi_x^0}{\partial x} = \delta_{11} M_x \quad (4.26)$$

y el desplazamiento axial  $u_x(x)$  se obtiene de la cinemática de la CLT (Barbero, 2011, Ch. 6) para flexión pura, como sigue:

$$u_x(x, z) = z \phi_x^0(x) \quad (4.27)$$

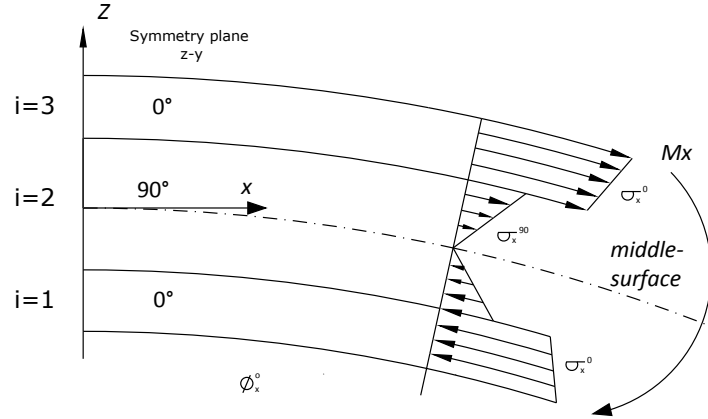
Por lo tanto, la deformación varía linealmente a través del espesor de la siguiente manera:

$$\epsilon_x(x, z) = z \frac{\partial \phi_x^0}{\partial x} \quad (4.28)$$

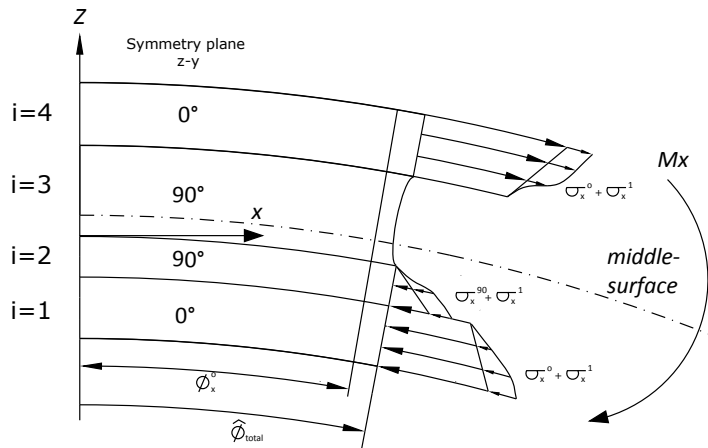
y la tensión es lineal en cada lámina a través del espesor, como muestra la Figura 4.2.a (debido a la diferencia de rigidez de las láminas). Para un laminado no dañado, las tensiones interlaminares no son necesarias para satisfacer la continuidad de desplazamiento a través del espesor en el interior de laminado.

Si una fisura aparece en la lámina  $k$ , la superficie de la fisura se convierte en un borde libre y por tanto, deja de soportar tensión. Para mantener el equilibrio, las tensiones en el resto de las láminas se deben incrementar como muestra la Figura 4.2.b para  $k = 3$  (contando desde la parte inferior del laminado). La distribución de tensiones intralaminas resultante, no es conocida a priori y no necesariamente tiene que ser lineal en cada lámina, pero el sumatorio de todas estas distribuciones perturbadas en el resto de láminas que no se fisuran, deben compensar la pérdida de tensión de la lámina dañada. Dicho de otro modo, la tensión que deja de soportar la lámina

fisurada, se traslada al resto de láminas. De esta forma, el laminado deja de ser simétrico, siendo necesario el estudio completo de éste así como la excentricidad y la formación de fisuras, incluso si el laminado inicialmente era simétrico.



(a) Distribución normal de tensiones antes de fisurarse para un laminado inicialmente simétrico.



(b) Distribución normal de tensiones después de fisurarse, donde la lámina fisurada es  $k = 3$  cuya orientación de las fibras es  $\theta = 90^\circ$ .

Figura 4.2: Distribución normal de tensiones antes y después de fisurarse para el laminado  $[0/90/0]_s$  inicialmente simétrico.

Para ayudarnos a entender mejor la cinemática propuesta, consideremos a modo de ejemplo un laminado cuya secuencia de apilamiento sea simétrico sujeto a flexión pura. Como la distribución fundamental de desplazamientos debido a  $M_x$  es antimétrica (4.27), la distribución de tensiones intralaminas será aproximadamente asimétrica.



Como la tensión axial desaparece en la superficie de la fisura, es necesario que aparezcan tensiones interlaminares  $\tau_{xz}$  para satisfacer la continuidad de los desplazamientos en las intercaras entre la lámina fisurada y las láminas adyacentes. Esta tensión es nula, tanto en la parte superior como en la inferior del laminado, al ser éstas superficies libres. Por otro lado, las intercaras que limitan la lámina fisurada están sometidas a tensiones interlaminares en la misma dirección (signo opuesto), como muestra la Figura 4.3, donde los signos opuestos se producen debido al signo opuesto de la normal de las intercaras. Las flechas indican las tensiones interlaminares que cada lámina ejerce sobre la adyacente. La continuidad de la deformación intralaminar  $\gamma_{xz}(z)$  dentro de la lámina fisurada provoca que dichas tensiones desaparezcan en un punto de la superficie fisurada de la lámina transversal sometida a tracción, tal como se ilustra en Figura 4.3, pero no necesariamente en la superficie media, ya que el laminado está sometido a un estado de flexión pura y el desplazamiento de las intercaras que limitan la lámina fisurada no son iguales. Además el desplazamiento de la intercara superior siempre será mayor que el de la intercara inferior, provocando que el punto libre de tensión intralaminar esté por debajo de la superficie media de la lámina fisurada.

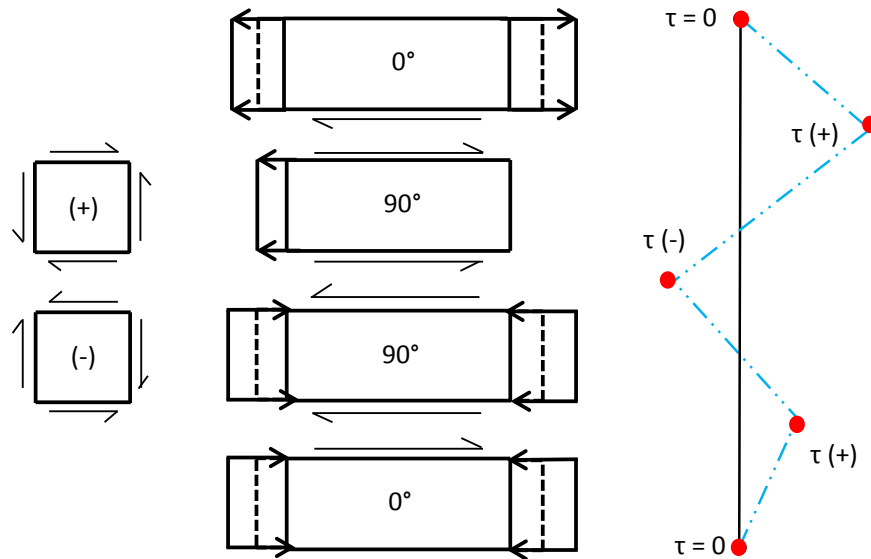


Figura 4.3: Distribución lineal lámina a lámina de las tensiones intralaminares para un laminado  $[0/90/90/0]$ . La lámina fisurada es  $k = 3$  cuyas fibras están orientadas  $\theta = 90^\circ$ .

Como la solución fundamental de desplazamientos (4.27) (antes de que aparezca la fisura) es simétrica, la distribución total de desplazamientos (después de la aparición de la fisura), es *casi* simétrica. Por lo tanto, las tensiones interlaminares en todas las láminas no fisuradas, deben ser positivas. Además, como sucedía en el modelo del capítulo anterior, la distribución a través del espesor tiene que ser una función impar y la más sencilla de todas es una distribución lineal

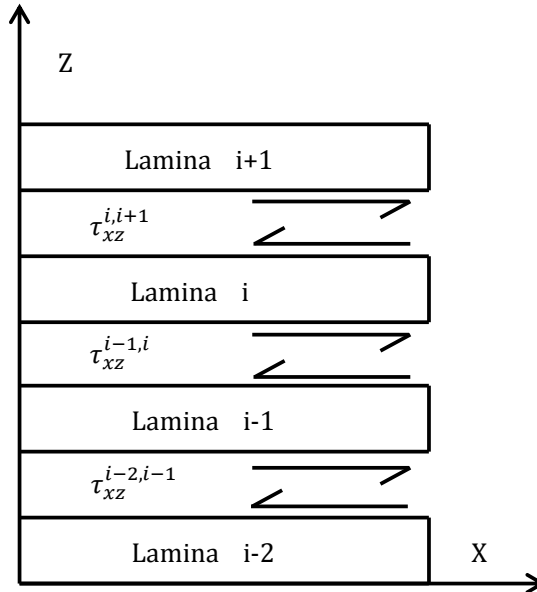
como muestra la Figura 4.3.

Utilizando una distribución lineal como posible solución, los desplazamientos de cada lámina dejan de ser constantes y por lo tanto, el campo de desplazamientos pasa a ser cuadrático. Como la solución de las ecuaciones de elasticidad para ese problema son intratables, se considerarán nuevas aproximaciones para reducir el problema a un estado unidimensional (1D) y obtener así, unos valores promediados que caractericen el comportamiento del laminado. Con este objetivo, se introducen las siguientes funciones matemáticas:

$$\hat{f} = \frac{1}{h_i} \int_{h_i} f(z) dz \quad (4.29)$$

$$\hat{f}' = \frac{1}{h_i} \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} f(z^{i-1,i} - z) dz \quad (4.30)$$

La ecuación (4.29) proporciona el promedio de una función  $f$  sobre el espesor de una lámina. Cuando  $f$  es el desplazamiento  $u^i(x, z)$ , la ecuación (4.30) proporciona el desplazamiento promediado de una lámina respecto a una de sus intercaras, donde  $i$  hace referencia al número de la lámina empezando desde  $i = 1$  hasta la parte superior del laminado,  $i = N$ . A partir de ahora se calcularán los desplazamientos promediados en función de las tensiones interlaminares como sucedía en el capítulo anterior en la sección 3.4, apareciendo un nuevo término independiente como veremos más adelante.



*Figura 4.4: Tensiones interlaminares en las intercaras de un laminado genérico.*

Consideremos el laminado genérico de la Figura 4.4 y el sistema de coordenadas como se

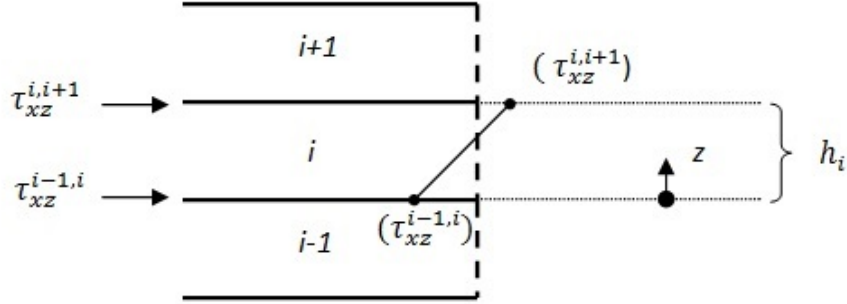


Figura 4.5: Sistema de coordenadas local de la lámina  $i$ .

muestra en la Figura 4.5. La función intralaminar elegida es una distribución lineal como sigue:

$$\tau_{xz}^i(x, z) = \tau_{xz}^{i,i+1}(x) + [\tau_{xz}^{i-1,i}(x) - \tau_{xz}^{i,i+1}(x)] \frac{z^{i,i+1} - z}{h_i} \quad (4.31)$$

Teniendo en cuenta una distribución de tensiones intralaminar  $\tau_{xz}^i$  lineal a través del espesor, se produce una distribución de desplazamientos cuadráticos  $u_1^i(x, z)$ , también llamada solución perturbada. De esta manera, la ecuación (4.9) representa la cinemática de un laminado con una deformación cuadrática en cada lámina, que satisface las condiciones de tensiones interlaminares nulas en la superficie superior e inferior de un laminado como se ilustró en la Figura 4.3, es decir,  $\tau_{xz}(\pm h/2) = 0$ . Operando mediante la función el peso-promedio (4.30) de (4.13) con  $\tau_{xz}^i$  dado por (4.31), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_i} \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} \frac{\partial u^i}{\partial z} (z^{i,i+1} - z) dz = \\ & \frac{1}{h_i} \bar{S}_{55}^i \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} \tau_{xz}^{i,i+1} (z^{i,i+1} - z) dz + \frac{1}{h_i} \bar{S}_{55}^i \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} [\tau_{xz}^{i-1,i} - \tau_{xz}^{i,i+1}] \frac{(z^{i,i+1} - z)^2}{h_i} dz + \\ & \frac{1}{h_i} \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} \phi_x^o (z^{i,i+1} - z) dz \end{aligned} \quad (4.32)$$

En el siguiente paso, se desarrolla el término izquierdo de la ecuación (4.32) como sigue:

$$\frac{1}{h_i} \left[ \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} \frac{\partial u^i}{\partial z} z^{i,i+1} dz - \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} \frac{\partial u^i}{\partial z} z dz \right] \quad (4.33)$$

Integrando la ecuación (4.33), se obtiene:

$$\frac{1}{h_i} \left[ z^{i,i+1} u^i(z^{i,i+1}) - z^{i,i+1} u^i(z^{i-1,i}) + z^{i-1,i} u^i(z^{i-1,i}) - z^{i,i+1} u^i(z^{i,i+1}) \right] + \frac{1}{h_i} \int_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} u^i dz \quad (4.34)$$

y simplificando resulta:

$$\frac{1}{h_i} \left[ z^{i-1,i} - z^{i,i+1} \right] u^i(z^{i-1,i}) + \widehat{u}(i) \quad (4.35)$$

donde  $\widehat{u}(i)$  es el desplazamiento promediado de la lámina  $i$  de acuerdo a la ecuación (4.29). De esta forma, el problema bidimensional (2D) se reduce a una dimensión (1D), donde las incógnitas  $\widehat{u}(i)$  son solo función de  $x$ . Por lo tanto la expresión (4.35) se reduce a:

$$\widehat{u}(i) - u(z^{i-1,i}) \quad (4.36)$$

la cual se observa que es igual a  $\partial u^i / \partial z$ . Integrando el primer término del lado derecho de la ecuación (4.32) se obtiene:

$$-\frac{\bar{S}_{55}^i}{h_i} \tau_{xz}^{i,i+1} \left[ \frac{(z^{i,i+1} - z)^2}{2} \right]_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} = \bar{S}_{55}^i \frac{h_i}{2} \tau_{xz}^{i,i+1} \quad (4.37)$$

Se integra el segundo término de la ecuación (4.32), como sigue:

$$-\frac{\bar{S}_{55}^i}{h_i} \frac{[\tau_{xz}^{i-1,i} - \tau_{xz}^{i,i+1}]}{h_i} \left[ \frac{(z^{i,i+1} - z)^3}{3} \right]_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} = \bar{S}_{55}^i \frac{h_i}{3} [\tau_{xz}^{i-1,i} - \tau_{xz}^{i,i+1}] \quad (4.38)$$

De la misma manera se integra el último término del lado derecho de la ecuación (4.32), que da como resultado:

$$-\frac{1}{h_i} \phi_x^o \left[ \frac{(z^{i,i+1} - z)^2}{2} \right]_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} = \frac{h_i}{2} \phi_x^o \quad (4.39)$$

resultando un nuevo término independiente que aparece con respecto al capítulo anterior.

Sustituyendo en las ecuaciones (4.36),(4.37),(4.38),(4.39) en la ecuación (4.32), se obtiene:

$$\widehat{u}(i) - u(z^{i-1,i}) = \bar{S}_{55}^i \frac{h_i}{2} \tau_{xz}^{i,i+1} + \bar{S}_{55}^i \frac{h_i}{3} [\tau_{xz}^{i-1,i} - \tau_{xz}^{i,i+1}] + \frac{h_i}{2} \phi_x^o \quad (4.40)$$

De igual forma, se obtiene la misma ecuación anterior para la lámina  $i - 1$ . El objetivo final es obtener dos ecuaciones que nos relacionen sus respectivos desplazamientos promediados con respecto a una misma intercara. De esta manera, el siguiente paso consiste en utilizar el sistema de coordenadas mostrado en la Figura 4.6. La función intralaminar elegida, será de nuevo una distribución lineal como sigue:

$$\tau_{xz}^{i-1}(x, z) = \tau_{xz}^{i-2, i-1}(x) + [\tau_{xz}^{i-1, i}(x) - \tau_{xz}^{i-2, i-1}(x)] \frac{z - z^{i-2, i-1}}{h_{i-1}} \quad (4.41)$$

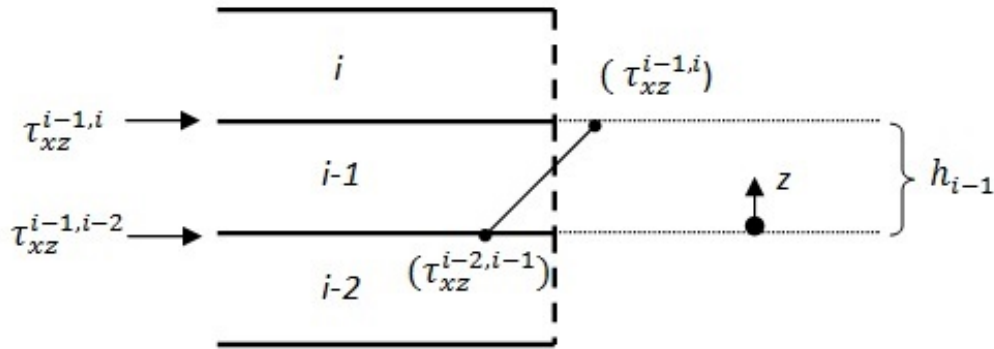


Figura 4.6: Sistema de coordenadas local de la lámina  $i-1$ .

Usando la función peso-promedio (4.30) en la ecuación (4.13) con  $\tau_{xz}^i$  dada por (4.41), y siguiendo el mismo procedimiento que antes, se obtiene:

$$u(z^{i-1, i}) - \hat{u}(i-1) = \bar{S}_{55}^{i-1} \frac{h_{i-1}}{2} \tau_{xz}^{i-1, i-2} + \bar{S}_{55}^{i-1} \frac{h_{i-1}}{3} [\tau_{xz}^{i-1, i} - \tau_{xz}^{i-2, i-1}] + \frac{h_{i-1}}{2} \phi_x^o \quad (4.42)$$

Sumando las ecuaciones (4.42) y (4.40) se tiene:

$$\hat{u}(i) - \hat{u}(i-1) = \tau_{xz}^{i, i+1} \bar{S}_{55}^i \frac{h_i}{6} + \tau_{xz}^{i-1, i} \left[ \bar{S}_{55}^i \frac{h_i}{3} + \bar{S}_{55}^{i-1} \frac{h_{i-1}}{3} \right] + \tau_{xz}^{i-2, i-1} \bar{S}_{55}^{i-1} \frac{h_{i-1}}{6} + \frac{1}{2} [h_i + h_{i-1}] \phi_x^o \quad (4.43)$$

La ecuación (4.43) proporciona el cambio escalón de los desplazamientos promediados de una lámina respecto a la siguiente en función de las tensiones de cortadura interlaminares. Como nosotros necesitamos la inversa, es decir, las tensiones interlaminares en función de los desplazamientos promediados, en primer lugar se obtiene la ecuación (4.43) para las  $N - 1$

intercaras como sigue:

$$-[H_o] \frac{\phi_x^o}{2} + \begin{Bmatrix} \widehat{u}(2) - \widehat{u}(1) \\ \widehat{u}(3) - \widehat{u}(2) \\ \vdots \\ \widehat{u}(N) - \widehat{u}(N-1) \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} \tau_{xz}^{1,2} \\ \tau_{xz}^{2,3} \\ \vdots \\ \tau_{xz}^{N-1,N} \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

donde  $[H]$  y  $[H_o]$  engloba los coeficientes de (4.43). Invirtiendo la ecuación (4.44), nos queda:

$$\tau_{xz}^{i,i+1} = \sum_{j=1}^{N-1} H_{i,j}^{-1} [\widehat{u}(j+1) - \widehat{u}(j)] - [L_{i,1}] \phi_x^o \quad (4.45)$$

donde la matriz  $[L_{i,1}]$  es:

$$[L_{i,1}] = \frac{1}{2} [H]^{-1} [H_o] \quad (4.46)$$

El siguiente paso consiste en calcular la diferencia de tensiones interlaminares en función de la diferencia de desplazamientos promediados a través de las  $N+1$  interfaces, incluyendo la superficie inferior y superior del laminado. De esta manera la expresión en forma de serie queda:

$$\tau_{xz}^{i,i+1} - \tau_{xz}^{i-1,i} = \sum_{j=1}^{N-1} [H_{i,j}^{-1} - H_{i-1,j}^{-1}] [\widehat{u}(j+1) - \widehat{u}(j)] - [L_{i,1} - L_{i-1,1}] \phi_x^o \quad (4.47)$$

Para la primera lámina,  $i = 1$ ,  $\tau_{xz}^{0,1} = 0$  y  $H_{0,j} = 0$  en la superficie inferior del laminado, puesto que es una superficie libre y para la superficie superior,  $i = N$ ,  $\tau_{xz}^{N,N+1} = 0$  y  $H_{N+1,j} = 0$  por la misma razón.

## 4.4. Equilibrio

Como sucedía en el capítulo anterior, una vez determinadas las tensiones interlaminares en función de los desplazamientos y se han obtenido las ecuaciones constitutivas de las láminas, procedemos a resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias con el fin de obtener una curvatura promediada del laminado y calcular así, la pérdida de rigidez. Basado en las aproximaciones (4.4), (4.29), (4.31) y (4.41), las ecuaciones de equilibrio interno en 3D se reducen a 2D como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\tau_{xz}^{i,i+1} - \tau_{xz}^{i-1,i}}{h_i} &= 0 \\ \sigma_y &= C \\ \sigma_z &= 0\end{aligned}\tag{4.48}$$

donde  $C = 0$  para tensión plana. Promediando la ecuación constitutiva (4.23) mediante la función (4.29), se obtiene:

$$\hat{\sigma}_x = E_x^i \left( \bar{z}_i \frac{\partial \phi_x^o(x)}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_1^i(x)}{\partial x} \right)\tag{4.49}$$

donde  $\hat{u}_1^i$  son los desplazamientos promediados de cada una de las láminas en función de  $x$ . Si sustituimos la ecuación (4.49) y (4.47) en (4.48) para cada una de las láminas desde  $i = 1 \dots N$ , la expresión resulta:

$$\begin{aligned}E_x^i \left( \bar{z}_i \frac{\partial^2 \phi_x^o(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_1^i(x)}{\partial x^2} \right) - \frac{[H_{i-1,1}^{-1} - H_{i,1}^{-1}]}{h_i} \hat{u}(1) + \frac{[H_{i,1}^{-1} - H_{i-1,1}^{-1} - H_{i,2}^{-1} + H_{i-1,2}^{-1}]}{h_i} \hat{u}(2) \\ + \dots + \frac{[H_{i,2}^{-1} - H_{i-1,2}^{-1} - H_{i,N-1}^{-1} + H_{i-1,N-1}^{-1}]}{h_i} \hat{u}(N-1) + \frac{[H_{i,N-1}^{-1} - H_{i-1,N-1}^{-1}]}{h_i} \hat{u}(N) \\ - \frac{[L_{i,1} - L_{i-1,1}]}{h_i} \phi_x^o = 0\end{aligned}\tag{4.50}$$

Si nos fijamos en la ecuación (4.50), ésta queda en función de la solución homogénea fundamental  $\phi_x^o(x)$ , una perturbación  $\hat{u}_1^i$  (debida a la formación de fisuras) y el desplazamiento total promediado  $\hat{u}$  de cada lámina. Para resolver este problema, necesitamos expresar la ecuación (4.50) en función de una única variable dependiente y un sistema de coordenadas global único. Para lograr esto, escogemos el ángulo total de giro  $\hat{\phi}_t^i$  que experimenta cada lámina como variable dependiente y  $x$ , como variable independiente. De esta forma, se puede descomponer el

desplazamiento total de cada lámina como sigue:

$$\hat{u}^i(x) = \bar{z}_i (\phi_x^o + \hat{\phi}_1^i) = \bar{z}_i \hat{\phi}_t^i \quad (4.51)$$

donde  $\bar{z}_i$  es la localización de la superficie media de la lámina  $i$ ;  $\phi_x^o$  es la solución fundamental (dada por CLT);  $\hat{\phi}_1^i$  es el ángulo perturbado ya promediado que experimenta cada lámina  $i$  causado físicamente por la formación de fisuras y  $\hat{\phi}_t^i$ , es el ángulo total de giro, común para todas las láminas, debido a la compatibilidad que el RVE debe cumplir con el resto del laminado. En la Figura 4.7 se muestra el ángulo total de giro del laminado sujeto a flexión pura.

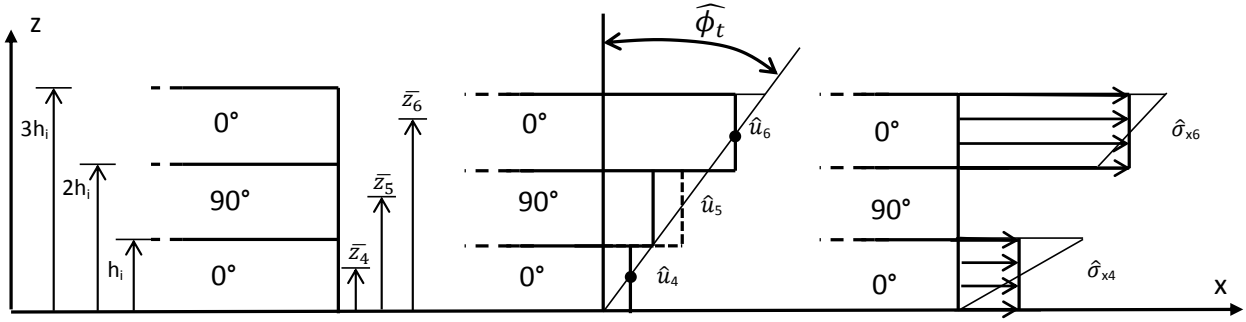


Figura 4.7: Tensiones y desplazamientos promediados para un laminado  $[0/90/0]_s$  con fisuras transversales, en la que solo se muestra la mitad del laminado sometida a tracción. La lámina fisurada es  $k = 5$  con  $\theta = 90^\circ$ .

Conviene señalar que las tensiones intralaminas (4.31) y (4.41) implican desplazamientos cuadráticos  $u^i(z)$  a lo largo del espesor, pero mediante la función promedio (4.29), la cual es utilizada también en la ecuación (4.51), reduciéndose dichos desplazamientos a una distribución lineal. En este caso, promediamos el desplazamiento lineal de cada lámina a través del espesor para obtener un sistema de  $N$  ecuaciones diferenciales mediante  $\bar{z}_i$  y poder resolver así el problema. Las matrices  $[M]$  y  $[K]$  resultarán iguales que en el modelo anterior pero con un término independiente nuevo (ver ecuación (3.51)).

#### 4.4.1. Solución al sistema de ecuaciones diferenciales

Sustituyendo  $\ddot{\phi}_t^i = \partial^2 \hat{\phi}_t / \partial x^2$  en la ecuación (4.50), el sistema matricial queda:

$$\bar{z}_i [M] \{\ddot{\phi}_t^i\} + \bar{z}_i [K] \{\phi_t^i\} - [\alpha_o] \phi_x^o = 0 \quad (4.52)$$

donde  $[M]$  es la matriz de rigidez axial,  $[K]$  es la matriz de rigidez interlaminar,  $[L_o] = (L_{i,1} - L_{i-1,1})/h_i$ , y  $\bar{z}_i$  es la localización de la superficie media de la lámina  $i$ . Operando en la ecuación



(4.52) se obtiene:

$$\{\ddot{\phi}_t^i\} + [D]\{\phi_t^i\} = [F]\phi_x^o \quad (4.53)$$

donde  $[R] = \bar{z}_i[M]$ ,  $[E] = \bar{z}_i[K]$ ,  $[F] = [R]^{-1}[L_o]$  y  $[D] = [R]^{-1}[E]$  para todas las láminas desde  $i = 1 \dots N$ . La matriz  $[D]$  se puede definir en función de la matriz de autovalores  $[\lambda]$  y autovectores  $[V]$  como sigue:

$$[D] = [V][\lambda][V]^{-1} \quad (4.54)$$

A continuación, aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$\{\ddot{Z}\} = [V]^{-1}\{\ddot{\phi}_t^i\} \quad (4.55)$$

De esta manera conseguimos desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a través de la matriz diagonal de autovalores  $[\lambda]$  como sucedía en el capítulo anterior:

$$\{\ddot{Z}_i\} + [\lambda]\{Z_i\} = [J]\phi_x^o \quad (4.56)$$

donde  $[J] = [V]^{-1}[F]$ .

Utilizando la ecuación (4.25), la solución homogénea fundamental  $\phi_x^o$  puede ser calculada a través de la ecuación (4.26). Integrando dicha ecuación, la solución fundamental es:

$$\phi_x^o(x) = (\delta_{11}M_x) x \quad (4.57)$$

De esta manera, la ecuación (4.56) queda:

$$\{\ddot{Z}_i\} + [\lambda]\{Z_i\} = [J_o]x \quad (4.58)$$

donde  $[J_o] = [J](\delta_{11}M_x)$ . La solución homogénea exacta mas la particular de la ecuación (4.56) es:

$$Z_i = r_i \exp(x\sqrt{-\lambda_i}) + s_i \exp(-x\sqrt{-\lambda_i}) + \frac{J_{oi}}{\lambda_i}x \quad (4.59)$$

donde  $\lambda_i$  son los autovalores,  $J_{oi}$  son constantes para cada lámina  $i$  y tanto  $r_i$  como  $s_i$ , son las constantes a resolver en función de las condiciones de contorno. El ángulo total de giro de las láminas puede ser escrito como un sumatorio de funciones elementales como sigue:

$$\hat{\phi}_t = \sum_{j=1}^N V_{ij} Z_j \quad (4.60)$$

Tomando el origen de coordenadas en el centro de la mínima celda unidad representativa (RVE), como se muestra en la Figura 4.1, el plano  $x$ - $z$  es un plano de simetría y como  $\hat{\phi}_t^i(0) = 0$ , entonces  $s_i = -r_i$  y la ecuación (4.59) resulta:

$$Z_i = r_i \left( \exp(x\sqrt{-\lambda_i}) - \exp(-x\sqrt{-\lambda_i}) \right) + \frac{J_{oi}}{\lambda_i} x \quad (4.61)$$

Como los autovalores son todos negativos, la ecuación (4.61) también se puede expresar como:

$$Z_i = p_i \sinh(x\sqrt{-\lambda_i}) + \frac{J_{oi}}{\lambda_i} x; \quad i = 1 \dots N \quad (4.62)$$

donde  $p_i = 2r_i$ .

La ecuación (4.62) implica que el ángulo total de giro promediado  $\hat{\phi}_t^i$  en (4.60) es un sumatorio de funciones hiperbólicas y lineales, resultando ambas componentes necesarias para describir la solución homogénea  $\phi_x^0$  y las perturbaciones cerca de la fisura ( $x = \pm\ell$ ). En este caso, la solución homogénea  $\phi_x^0$  se obtiene exclusivamente mediante la combinación lineal de los términos  $(J_{oi}/\lambda)x$  de la ecuación (4.62), mientras que la solución perturbada se corresponde con la combinación lineal de los  $\sinh(x)$ . Para un valor dado de  $x$ , la solución homogénea es constante e igual al ángulo de giro dado por CLT, el cuál obviamente produce desplazamientos lineales  $u_x^0(z)$ .

Los resultados numéricos confirman que para cada caso analizado, una de las funciones hiperbólicas representa la deformación homogénea  $\phi_x^o$  (lineal en  $-\ell < x < \ell$ ) y el resto, son perturbaciones que corrigen la solución cerca del extremo de la fisura, es decir, en  $x = \pm\ell$ . Para describir una curvatura homogénea ( $\phi_x^o$ ) mediante un  $\sinh(x\sqrt{-\lambda_s})$ , es necesario trabajar en un dominio de los números reales muy cercano al cero y por lo tanto, uno de los autovalores debe ser extremadamente pequeño en la ecuación (4.62). De esta manera, el  $\sinh$  se aproxima a una función casi lineal en el rango de valores de  $x$  en el que trabajamos ( $-\ell < x < \ell$ ). Como sucedía en el capítulo anterior, los resultados arrojados para este modelo, muestran que uno de los autovalores es casi nulo,  $\lambda_s \simeq O(-18)$ .

Los valores que arroja un  $\sinh$  al trabajar con un autovalor muy pequeño para producir una función casi lineal, proporciona valores de órdenes de magnitud muy bajos, y por tanto, necesitamos una constante  $p_s$ , que sea lo suficientemente grande como para recuperar la deformación homogénea. Esta pareja autovalor/constante muy pequeña y grande respectivamente, produce problemas numéricos que para solucionarlos, se puede aproximar la deformación homogénea a una función lineal  $Z_s = B_o x$ , mediante un autovalor nulo ( $\lambda = 0$ ). Por tanto, se propone sustituir la ecuación (4.59) por la siguiente expresión:

$$\hat{\phi}_t = \sum_{j=1}^N (1 - \delta_{js}) V_{ij} Z_j + V_{is} B_o x \quad (4.63)$$

donde  $\lambda_s$  es el autovalor nulo y  $B_o$  es una parte de la solución fundamental  $\phi_x^0$ . Como el resto de funciones  $Z_i$  son una combinación lineal de perturbaciones y una porción de la deformación homogénea, la solución final puede expresarse en función de la curvatura  $\kappa_x^0$  del laminado no dañado, obtenida por CLT, como sigue:

$$\boxed{\hat{\phi}_t = \sum_{j=1}^N (1 - \delta_{js}) V_{ij} Z_j' + \kappa_x^0 x} \quad (4.64)$$

donde las funciones perturbadas son:

$$Z_j' = p_i \sinh(x\sqrt{-\lambda_i}) \quad (4.65)$$

Conviene destacar que la curvatura  $\kappa_x^0 = \delta_{11} M_x$ , la cual es la misma para todas las láminas, puede calcularse también agrupando todos los términos lineales de la ecuación (4.59) de la siguiente manera:

$$\kappa_x^0 = \sum_{j=1}^N (1 - \delta_{js}) V_{ij} \frac{J_{oi}}{\lambda_i} + B_o V_{is} \quad (4.66)$$

#### 4.4.2. Condiciones de contorno

De igual modo que aparecía en el apartado 3.5.2 del capítulo anterior, tenemos tres tipos de condiciones de contorno a los que se hace referencia: la deformación del contorno de nuestro RVE, la condición de borde libre en la lámina fisurada y la condición de equilibrio de momentos ( $M_x$ ) en el laminado.

La deformación del contorno de nuestro RVE debe ser compatible con el resto del laminado. Esto significa que el ángulo total de giro promediado de todas las láminas excepto la fisurada debe ser el mismo:

$$\boxed{\widehat{\phi}_t^m(\pm\ell) = \widehat{\phi}_t^r(\pm\ell); \quad \forall m \neq k} \quad (4.67)$$

donde  $r$  es la primera lámina ( $i \neq k$ ) que se toma como referencia. En la implementación por ordenador,  $r = 1$  si la primera lámina no está fisurada, y si no  $r = 2$ , correspondiéndose con la siguiente lámina.

**(a) Condiciones de carga  $\{M_x = 1, \Delta T = 0\}$**

- Condición de tensión libre en la cara fisurada

La lámina fisurada  $k$  que presenta una discontinuidad en  $x = \pm\ell$ , como se observa en la Figura 4.1, no soporta tensión en dirección normal a la cara fisurada. Esta condición de borde queda:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \widehat{\sigma}_x^k(\ell) dy = 0 \quad (4.68)$$

donde los límites de integración representan un RVE que tiene una unidad de longitud en dirección  $y$  (en dirección de las fibras de la lámina fisurada). Usando la ecuación (4.51), se obtiene:

$$E_x^k \int_{-1/2}^{1/2} \left( \bar{z}_k \frac{\partial \phi_t^k(\ell)}{\partial x} - \widehat{\alpha}_x^k \Delta T \right) dy = 0 \quad (4.69)$$

que simplificando queda como:

$$\boxed{\dot{\widehat{\phi}}_t^k(\ell) = \dot{\widehat{\phi}}_t^k(-\ell) = 0} \quad (4.70)$$

- Condición de equilibrio bajo cargas externas

Cuando aplicamos un momento  $M_x$  al contorno, todas las láminas excepto la fisurada soportan carga, puesto que aparecen fisuras en el interior del laminado que pasan a ser una condición de borde libre. Por lo tanto, el equilibrio de cargas en el contorno de nuestro RVE excluirá a la lámina fisurada y la ecuación resultante es:

$$\sum_{i=1}^N (1 - \delta_{ik}) \int_{-1/2}^{1/2} \int_{h_i} \hat{\sigma}_x^i(\ell) z dz dy = M_x \quad (4.71)$$

donde  $h = \sum_{i=1}^N h_i$  es el espesor del laminado,  $k$  es la lámina fisurada,  $\delta$  es la delta de Kronecker, y  $M_x$  es la carga a flexión aplicada al laminado. Usando la ecuación (4.49) se tiene:

$$\sum_{i=1}^N (1 - \delta_{ik}) E_x^i \int_{-1/2}^{1/2} \int_{h_i} \left( \bar{z}_k \frac{\partial \phi_t^i(\ell)}{\partial x} - \hat{\alpha}_x^k \Delta T \right) z dz dy = M_x \quad (4.72)$$

donde,

$$\int_{h_i} z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} = h_i \bar{z}_i \quad (4.73)$$

la cual simplificada queda:

$$\boxed{\sum_{i=1}^N (1 - \delta_{ik}) E_x^i h_i \bar{z}_i^2 \dot{\phi}_t^i = M_x} \quad (4.74)$$

A nivel macroscópico, la lámina fisurada sigue soportando carga aunque parte haya sido transferida al resto del laminado mediante las tensiones interlaminares en la cercanía de la fisura.

### (b) Condiciones de carga $\{M_x = 0, \Delta T = 1\}$

- Condición de tensión libre en la cara fisurada

De nuevo, la superficie normal a la cara fisurada es un borde libre y, por tanto, no soporta tensión. Esta condición queda:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \hat{\sigma}_x^k(\ell) dy = 0 \quad (4.75)$$

donde los límites de integración representa un RVE que tiene una unidad de longitud en dirección  $y$  (en dirección de las fibras de la lámina fisurada). Usando la ecuación (4.51), se obtiene:

$$E_x^k \int_{-1/2}^{1/2} \left( \bar{z}_k \frac{\partial \phi_t^k(\ell)}{\partial x} - \hat{\alpha}_x^k \Delta T \right) dy = 0 \quad (4.76)$$

ecuación que simplificada queda como sigue:

$$\boxed{\dot{\phi}_t^k(\ell) = \dot{\phi}_t^k(-\ell) = \frac{\hat{\alpha}_x^k \Delta T}{\bar{z}_k}} \quad (4.77)$$

- Condición de equilibrio bajo cargas externas

Cuando aplicamos un momento  $M_x$  al contorno, todas las láminas excepto la fisurada soportarán carga. Por tanto, el equilibrio de cargas en el contorno de nuestro RVE excluye la lámina fisurada, como sigue:

$$\sum_{i=1}^N (1 - \delta_{ik}) \int_{-1/2}^{1/2} \int_{h_i} \hat{\sigma}_x^i(\ell) z dz dy = M_x = 0 \quad (4.78)$$

donde  $h = \sum_{i=1}^N h_i$  es el espesor del laminado,  $k$  es la lámina fisurada,  $\delta$  es la delta de Kronecker, y  $M_x$  es la carga a flexión aplicada al laminado. Usando la ecuación (4.49) se tiene:

$$\sum_{i=1}^N (1 - \delta_{ik}) E_x^i \int_{-1/2}^{1/2} \int_{h_i} \left( \bar{z}_k \frac{\partial \phi_t^i(\ell)}{\partial x} - \hat{\alpha}_x^k \Delta T \right) z dz dy = 0 \quad (4.79)$$

donde,

$$\int_{h_i} z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_{z^{i-1,i}}^{z^{i,i+1}} = h_i \bar{z}_i \quad (4.80)$$

y simplificando se obtiene:

$$\boxed{\sum_{i=1}^N (1 - \delta_{ik}) E_x^i h_i \bar{z}_i^2 \dot{\phi}_t^i = \sum_{i=1}^N (1 - \delta_{ik}) E_x^i h_i \bar{z}_i \hat{\alpha}_x^i \Delta T} \quad (4.81)$$

## 4.5. Degradación de rigidez del laminado

Las condiciones de contorno descritas en la sección previa, permiten determinar las constantes  $p_i$  de la ecuación (4.62) para  $i \neq s$ , las cuales son N-1 valores más la constante  $B_o$ . Para hacer ésto, se sustituye en la ecuación (4.63) las condiciones de contorno (4.67), (4.77), y (4.81).

Planteando las condiciones de carga  $M_x = 1$  y  $\Delta T = 0$ , se puede calcular el módulo a flexión del laminado degradado ( $E_x^b(\lambda)$ ) en función de la densidad de fisuras  $\lambda_k$ . Cuando aplicamos un momento puro  $M_x = 1$ , la curvatura total del laminado homogeneizado se obtiene promediando la curvatura (4.64) mediante la ecuación (4.29) como sigue:

$$\widehat{\kappa}_x = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\partial \widehat{\phi}_t^r(x)}{\partial x} dx = \frac{\widehat{\phi}_t^r(\ell)}{\ell} \quad (4.82)$$

siendo  $r$  la lámina de referencia escogida.

Para poder calcular el módulo a flexión del laminado  $E_x^b(\lambda)$ , se necesita la inversa de  $\delta_{11}$ :

$$\delta_{11}^{-1} = \frac{M_x}{\widehat{\kappa}_x} \quad ; \quad \text{para } M_x = 1, \Delta T = 0 \quad (4.83)$$

Finalmente, el módulo a flexión del laminado se puede expresar de la siguiente manera:

$$E_x^b = \frac{12}{h_t^3 \delta_{11}^{-1}} = \frac{12 \ell}{h_t^3 \widehat{\phi}_t^r(\ell)} \quad (4.84)$$

el cual es determinado a través del ángulo total de giro en  $x = \ell$ , calculado mediante las ecuaciones (4.82) y (4.64).

## 4.6. Constante de dilatación térmica (CTE\*) del laminado

En este caso para calcular el CTE\* (curvatura térmica) del laminado sometido a unas condiciones de carga  $M_x = 0$  y  $\Delta T = 1$ , se opera como en el capítulo anterior, apartado 3.7. La ecuación constitutiva es:

$$\{\widehat{M}_r\} = [D_{rs}(\lambda)] \{\widehat{K}_s - \alpha_{CTEs}^*(\lambda) \Delta T\}; \quad r, s = x, y, z \quad (4.85)$$

donde  $\widehat{M}_r$  está definida por unidad de longitud y  $\alpha_{CTEs}^*(\lambda)$  es la constante de dilatación térmica del laminado dañado sometido a flexión o también llamada curvatura térmica. Tanto la matriz

de rigidez como la constante CTE del laminado, están definidas en ejes globales.

Aplicando las condiciones de carga  $M_x = 0, \Delta T = 1$ , nos permite calcular el CTE\* del laminado degradado  $\alpha_{CTEs}^*(\lambda)$  en función de la densidad de fisuras  $\lambda_k$ . La curvatura total del laminado ya homogeneizado bajo las condiciones de carga mencionadas (apartado 4.4.2), se obtiene promediando la curvatura (4.64) mediante la ecuación (4.29):

$$\hat{\kappa}_x = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\partial \hat{\phi}_t^r(x)}{\partial x} dx = \frac{\hat{\phi}_t^r(\ell)}{\ell} \quad (4.86)$$

siendo  $r$  la lámina de referencia escogida.

Una vez se ha obtenido la curvatura promediada del laminado mediante la ecuación (4.86), se despeja el  $\alpha_{CTEs}^*(\lambda)$  de la ecuación (4.85) bajo el estado de cargas  $\{M_x = 0, \Delta T = 1\}$  y se opera de la misma manera que en el apartado anterior, resultando:

$$0 = E_x^b(\lambda) \frac{h^3}{12} \{ \hat{K}_x - \alpha_{CTEx}^*(\lambda) \} \quad (4.87)$$

donde el CTE\* del laminado queda:

$$\boxed{\alpha_{CTEx}^*(\lambda) = \frac{\hat{\phi}_t^r(\ell)}{\ell}} \quad (4.88)$$

Otra manera de calcular el  $\alpha_{CTEx}^*(\lambda)$  del laminado, es usando la pérdida de rigidez a flexión  $E_x^b(\lambda)$  calculada en el apartado 4.5, sin necesidad de volver a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales bajo las condiciones  $\{M_x = 0, \Delta T = 1\}$ . En este se calcula la pérdida de rigidez a flexión de la lámina fisurada mediante la mecánica del daño continuo de la siguiente manera:

$$E_x^{b_k}(\lambda) = \frac{h}{h_k} \left[ E_x^b(\lambda) - \sum_{i=1}^m E_x^{b_m} \frac{h_m}{h} \right] \quad (4.89)$$

Una vez a sido calculada la pérdida de rigidez a flexión de la lámina fisurada  $E_x^{b_k}(\lambda)$ , resolvemos la carga térmica equivalente como sigue:

$$M^T = \Delta T \sum_{i=1}^N E_x^{b_i} \{ \alpha_x^i \} \bar{z}_i h_i \quad (4.90)$$

Como el estado de cargas es  $\{\hat{\sigma}_x = 0, \Delta T = 1\}$ , la curvatura que sufre el laminado se debe únicamente a una curvatura térmica. En ese caso, trataremos el laminado como un sólido homogéneo, donde el CTE\* se obtiene mediante la siguiente ecuación:



$$\alpha_{CTEx}(\lambda) = \frac{1}{\Delta T} \left[ \frac{E_x(\lambda) h^3}{12} \right]^{-1} \{M^T\} \quad (4.91)$$



## Capítulo 5

### Discusión de los resultados

#### 5.1. Resultados en laminados poliméricos en condiciones de membrana

El modelo de daño en condiciones de membrana, ha sido implementado en el programa MATLAB R2013 con el fin de automatizar el proceso de cómputo y obtener así, tanto la degradación del laminado  $E_x(\lambda)$ , como el coeficiente de expansión térmica global  $\alpha_{CTE}(\lambda)$ . En el presente estudio se analizarán tanto laminados simétricos balanceados  $[0_m/90_n/\pm\theta_r]_s$ , como cruzados  $[0_m/90_n]_s$  bajo la influencia de láminas a  $90^\circ$  con fisuras en la matriz para laminados tanto de fibra de vidrio/epoxy (J. Varna and Talreja, 1999, 2001) como de fibra de carbono/epoxy (Liu and Nairn, 1992).

Los resultados numéricos y conclusiones de esta sección, están divididos en cuatro partes:

- En primer lugar, se calcula la degradación de rigidez y el CTE para un conjunto de laminados de acuerdo al modelo unidimensional descrito en el capítulo 3. Los resultados arrojados para este modelo, se compararán con resultados experimentales (J. Varna and Talreja, 1999, 2001; Liu and Nairn, 1992) para laminados poliméricos de fibra de vidrio y con resultados de elementos finitos (Barbero and Cosso, 2013) tanto para laminados poliméricos de fibra de carbono como de fibra de vidrio.
- En segundo lugar, se presentan los resultados de las tensiones intralaminares que se producen en el extremo de la fisura y a lo largo del RVE para dos configuraciones distintas. Estos resultados, se emplearán tanto para verificar las hipótesis descritas en capítulos anteriores como para una mayor compresión física del problema.
- En tercer lugar, se analizarán las funciones elementales que, mediante una combinación

lineal, proporcionan los desplazamientos promediados que sufren cada una de las láminas dentro de un laminado y dan solución al problema (3.63). Se utilizarán de nuevo las dos configuraciones mencionadas anteriormente.

- Por último, se analizará el número de condición de la matriz de autovalores  $[\lambda]$  y los problemas numéricos que puede ocasionar.

En la siguiente Tabla 5.1 se recogen las propiedades de los dos tipos de materiales que se emplearán a lo largo del documento, fibra de vidrio/epoxy y fibra de carbono/epoxy. En la Tabla 5.2, se recogen las distintas configuraciones empleadas y el objetivo de estudio en cada uno de los laminados.

<i>Propiedades</i>	<i>Fibra de vidrio/epoxy</i>	<i>Fibra de carbono/epoxy</i>
	<i>Fiberite/HyE 9082A (Varna)</i>	<i>Avimid K Polymer/IM6 (Nairn)</i>
$E_1$ [GPa]	44.7	134
$E_2$ [GPa]	12.7	9.8
$G_{12}$ [GPa]	5.8	5.5
$v_{12}$	0.297	0.3
$v_{23}$	0.41	0.5
$\alpha_1$ [ $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ]	8.42	-0.09
$\alpha_2$ [ $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ]	18.4	28.8
$t_k$ [mm]	0.144	0.144

Tabla 5.1: Propiedades de los compuestos Varna y Nairn.

<i>Propiedades</i>	<i>Secuencia del laminado</i>	<i>Objeto de estudio</i>
$A$	$[\pm 15/90_4]_s$ (Varna)	$E_x(\lambda), \alpha_{CTEx}(\lambda)$
$B$	$[\pm 30/90_4]_s$ (Varna)	$E_x(\lambda), \alpha_{CTEx}(\lambda)$
$C$	$[\pm 40/90_4]_s$ (Varna)	$E_x(\lambda), \alpha_{CTEx}(\lambda)$
$D$	$[0_2/90_4]_s$ (Varna)	$E_x(\lambda), \alpha_{CTEx}(\lambda), \tau_{xz}^i$
$E$	$[0/\pm 15/90_2]_s$ (Varna)	$\tau_{xz}^i$
$F$	$[0/90_8/0_{1/2}]_s$ (Varna)	$E_x(\lambda), \alpha_{CTEx}(\lambda)$
$G$	$[0/90_2]_s$ (Nairn)	$E_x(\lambda), \alpha_{CTEx}(\lambda)$
$H$	$[0/90_3]_s$ (Nairn)	$E_x(\lambda), \alpha_{CTEx}(\lambda)$
$I$	$[0_2/90_2]_s$ (Nairn)	$E_x(\lambda), \alpha_{CTEx}(\lambda)$

Tabla 5.2: Lista de laminados de estudio.

### 5.1.1. Análisis de la rigidez y CTE.

Los resultados experimentales que se han recopilado, solo son válidos para la degradación de rigidez ( $E_x(\lambda)$ ) en laminados Fiberite/HyE 9082A (fibra de vidrio/epoxy) debido a la dificultad que supone realizar este tipo de medición en laminados Avimid K Polymer/IM6 (fibra de carbono/epoxy). El principal motivo se debe a que en laminados de fibra de carbono/epoxy, la diferencia de rigidez entre las fibras y la matriz es muy alta. Dado que la resistencia a tracción en dirección de las fibras ( $F_{1t}$ ) se debe principalmente a éstas y en dirección transversal ( $F_{2t}$ ) a la matriz, resulta muy difícil de medir la pérdida de rigidez del laminado, es decir, la rigidez del laminado apenas varía puesto que las láminas a  $0^\circ$  tienen mucha más resistencia que las láminas a  $90^\circ$  y por tanto, soportan esta pérdida de carga sin apenas inmutarse. Debido a esta dificultad, los laminados de fibra de carbono/epoxy solo son comparados con resultados calculados por elementos finitos (Barbero and Cosso, 2013).

A continuación, se presentan los resultados obtenidos mediante el programa de MATLAB R2013 desarrollado para este modelo. Primero el programa carga un archivo Excel con una serie de densidades de fisuras desde 0,01 a 700, supuestos en un laminado genérico bajo las condiciones descritas en la sección 3.5.2. Tras cargar los datos, el programa solicita las condiciones de carga  $\{\hat{\sigma}, \Delta T\}$  y calcula la pérdida de rigidez del laminado o el CTE correspondiente.

En la Figura 5.1, se muestra la pérdida de rigidez en función de la densidad de fisuras ( $\lambda$ ) para los laminados A, B y C, comparándola con resultados experimentales y en la Figura 5.2, se compara con datos FEA. El módulo del laminado desciende un 39,1 % (de 21,66 a 13,19 MPa) para el laminado  $[\pm 15/90_4]_s$ , un 48,3 % (de 17,54 a 9,07 MPa) para el laminado  $[\pm 30/90_4]_s$  y un 56,1 % (de 15,07 a 6,60 MPa) para el laminado  $[\pm 40/90_4]_s$ .

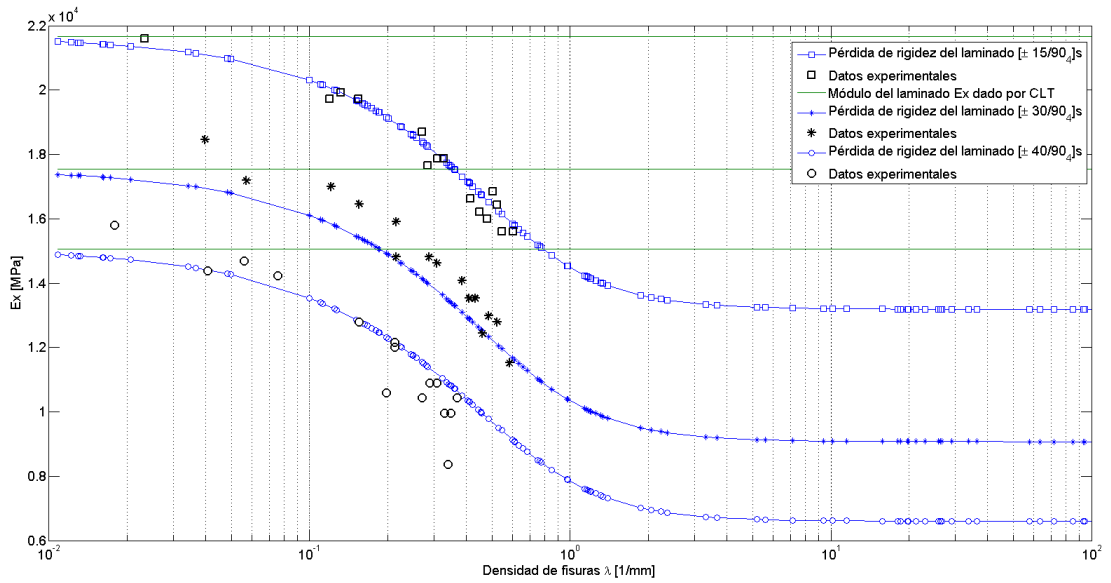


Figura 5.1: Pérdida de rigidez del laminado vs densidad de fisuras para el laminado  $[\pm\theta/90_4]_s$  tipo Fiberite/Hye-9082-A con  $\theta = 15, 30, 40$  comparándola con datos experimentales.

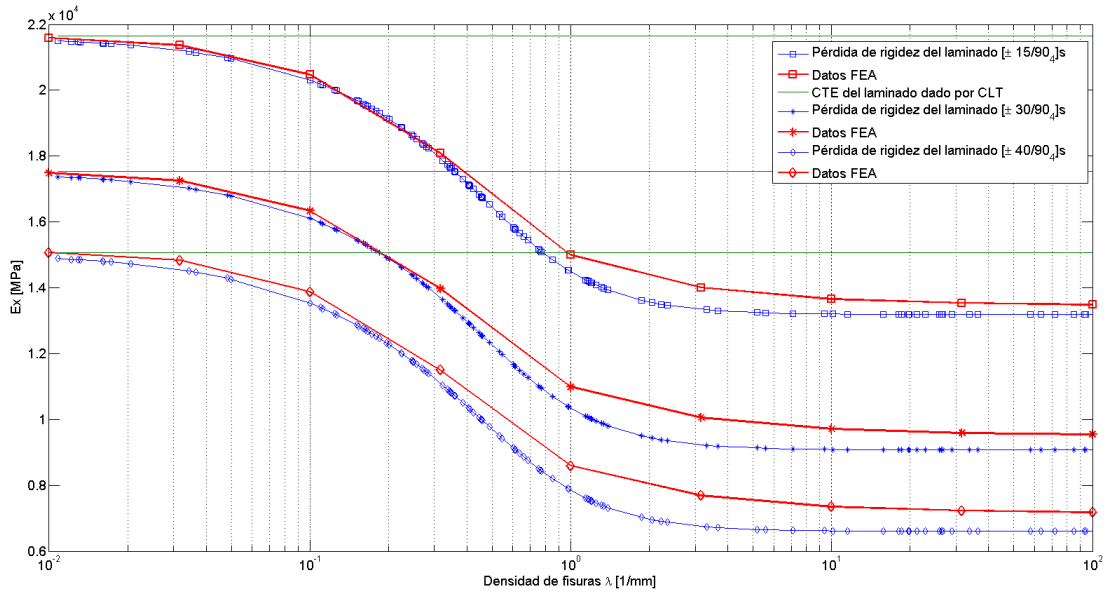


Figura 5.2: Pérdida de rigidez del laminado vs densidad de fisuras para el laminado  $[\pm\theta/90_4]_s$  tipo Fiberite/Hye-9082-A con  $\theta = 15, 30, 40$  comparándola con datos FEA.

En la siguiente Figura 5.3, se muestra la pérdida de rigidez en función de la densidad de fisuras ( $\lambda$ ) para los laminados D y F, comparándola con resultados experimentales y en la Figura 5.4, se compara con datos FEA. El módulo del laminado descende un 36,2 % (de 23,37 a 14,90 MPa) para el laminado  $[0_2/90_4]_s$  y un 60,2 % (de 17,75 a 7.06 MPa) para el laminado

$[0/90_8/0_{1/2}]_s$ .

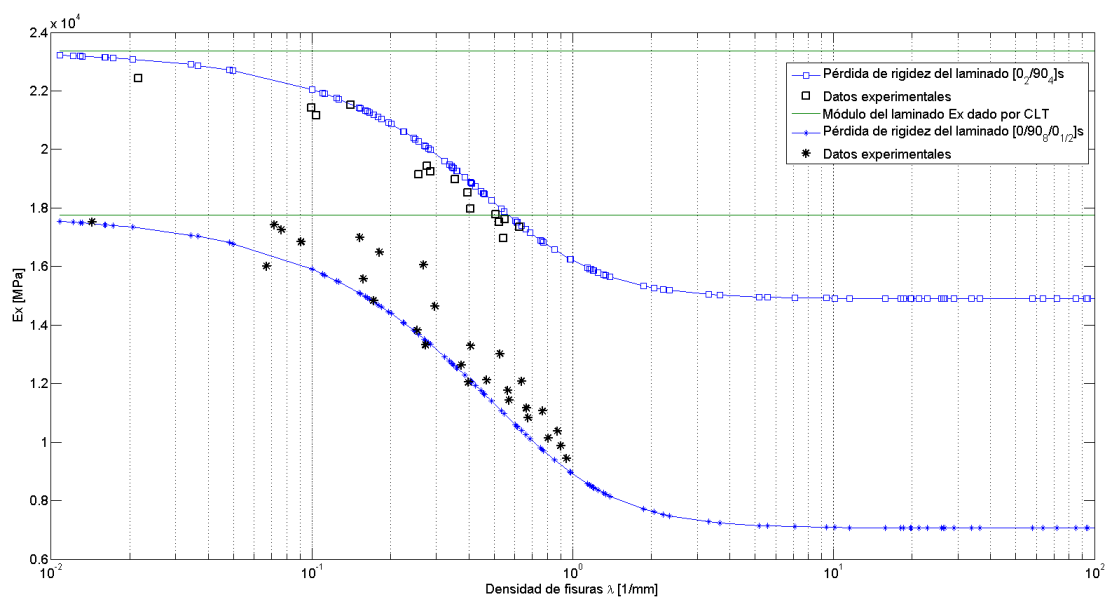


Figura 5.3: Pérdida de rigidez del laminado vs densidad de fisuras para los laminados  $[0_2/90_4]_s$  y  $[0/90_8/0_{1/2}]_s$  tipo Fiberite/Hye-9082-A comparándola con datos experimentales.

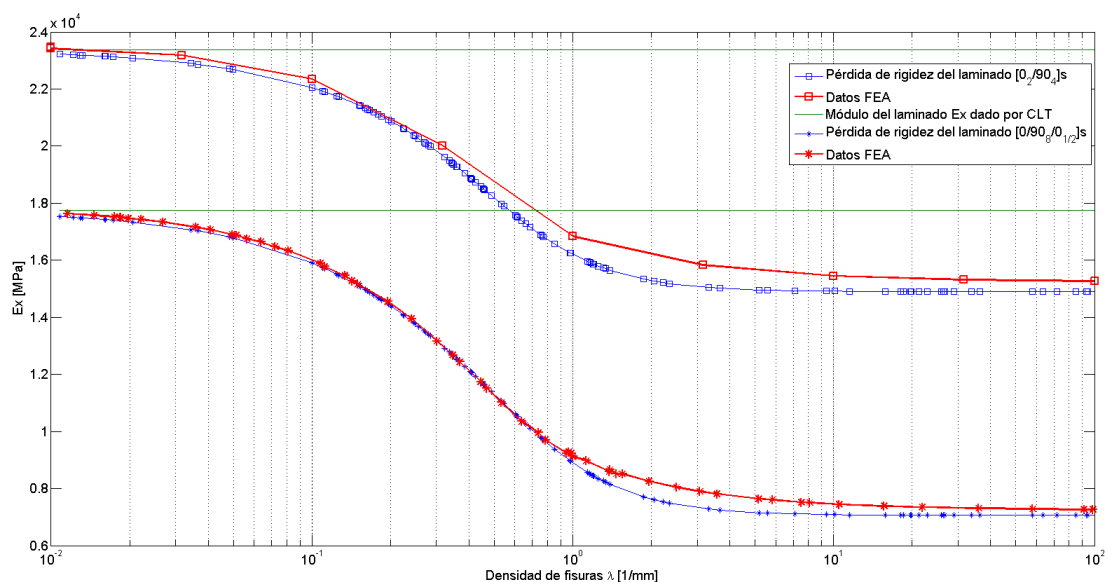


Figura 5.4: Pérdida de rigidez del laminado vs densidad de fisuras para los laminados  $[0_2/90_4]_s$  y  $[0/90_8/0_{1/2}]_s$  tipo Fiberite/Hye-9082-A comparándola con datos FEA.

En la Figura 5.5, se muestra la pérdida de rigidez en función de la densidad de fisuras  $\lambda$  para los laminados G,H e I, comparándola solo con resultados FEA al no haber resultados

experimentales fiables. El módulo del laminado desciende un 12,7 % (de 51,20 a 44,67 MPa) para el laminado  $[0/90_2]_s$ , un 17,9 % (de 40,85 a 33,50 MPa) para el laminado  $[0/90_3]_s$  y un 6,81 % (de 71,91 a 67,23 MPa) para el laminado  $[0_2/90_2]_s$ .

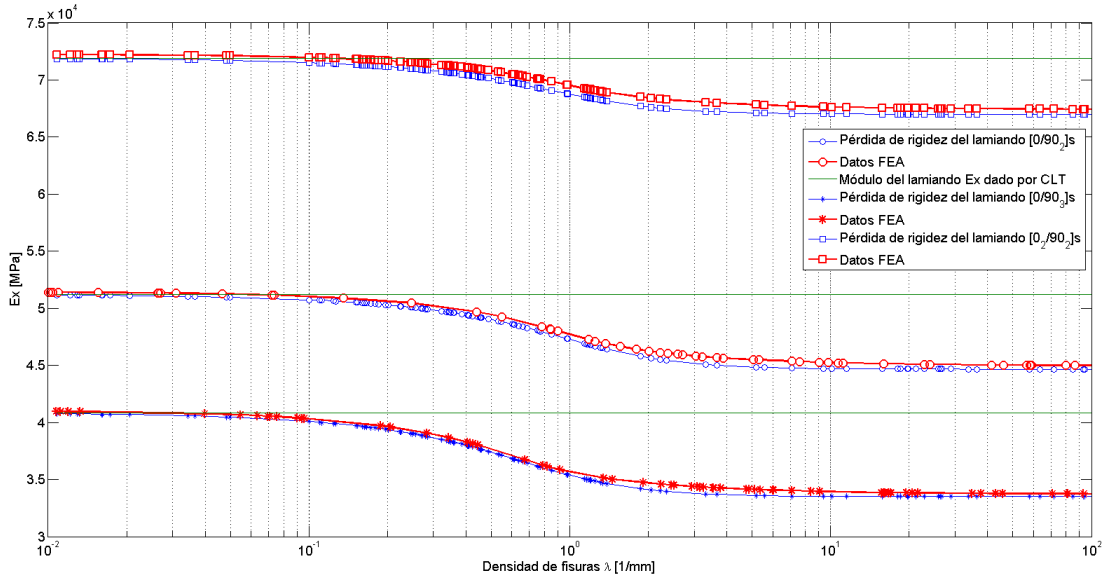


Figura 5.5: Pérdida de rigidez del laminado vs densidad de fisuras para los laminados  $[0/90_2]_s$ ,  $[0/90_3]_s$  y  $[0_2/90_2]_s$  tipo Avimid K Polymer/IM6 comparándola con datos FEA.

Los resultados mostrados en las Figuras 5.1 y 5.3, se ajustan con gran exactitud a los datos experimentales a pesar de la incertidumbre y los posibles errores que surgen en este tipo de ensayos. Por otro lado, los resultados mostrados en las Figuras 5.2, 5.4 y 5.5, se ajustan bastante bien a los resultados por elementos finitos (FEA) a pesar de que dichos resultados fueron obtenidos mediante un modelo bidimensional (2D) y por tanto, tienen en cuenta el coeficiente de Poisson en dirección transversal. Esta pequeña diferencia entre los resultados de nuestro modelo y los datos FEA, se debe a que en nuestro modelo, al ser unidimensional (estado de tensión plana), solamente analizamos el módulo de rigidez sin considerar dicho Coeficiente de Poisson. Además, el módulo del laminado dado por CLT, es el valor  $\varepsilon_x^o$  (ver (3.63)) calculado para cada densidad de fisuras  $\lambda$  y que puede apreciarse que, permanece constante e igual a  $E_x$  calculado por CLT para un laminado intacto ( $\lambda = 0$ ). La diferencia entre este valor constante y la pérdida de rigidez calculada ( $E_x(\lambda)$ ), es físicamente causada por las fisuras y numéricamente capturada por las  $N - 1$  perturbaciones de la solución (3.63).

A continuación, se presentan los resultados del cálculo del CTE del laminado ( $\alpha_{CTE_x}(\lambda)$ ) para las distintas configuraciones. En la Figura 5.6, se muestra la degradación del CTE en función de la densidad de fisuras ( $\lambda$ ) para los laminados A,B y C, en la Figura 5.7, para los



laminados D y F, y en la Figura 5.8, para los laminados G, H e I, comparando todas ellas con datos FEA.

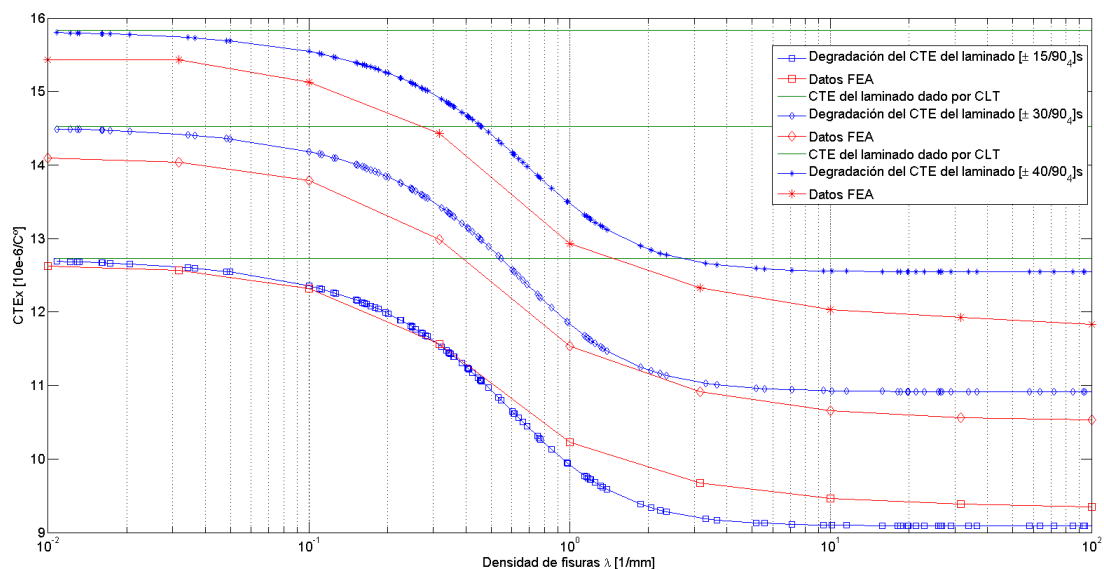


Figura 5.6: Degradación del CTE del laminado vs densidad de fisuras para el laminado  $[\pm\theta/90_4]_s$  tipo Fiberite/Hye-9082-A con  $\theta = 15, 30, 40$  comparándola con datos FEA.

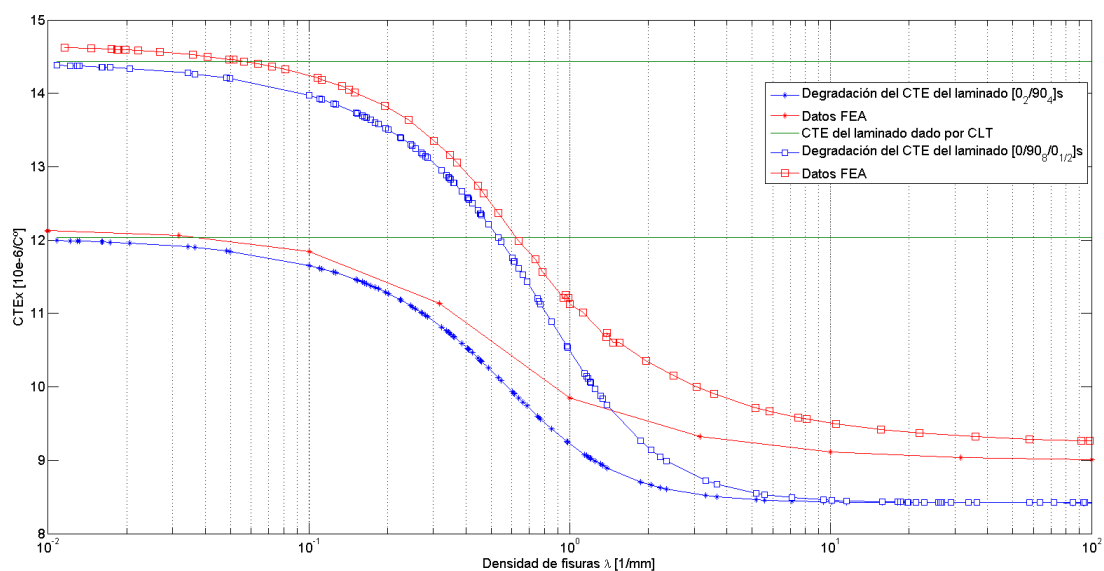


Figura 5.7: Degradación del CTE del laminado vs densidad de fisuras para los laminados  $[0_2/90_4]_s$  y  $[0/90_8/0_{1/2}]_s$  tipo Fiberite/Hye-9082-A comparándola con datos FEA.

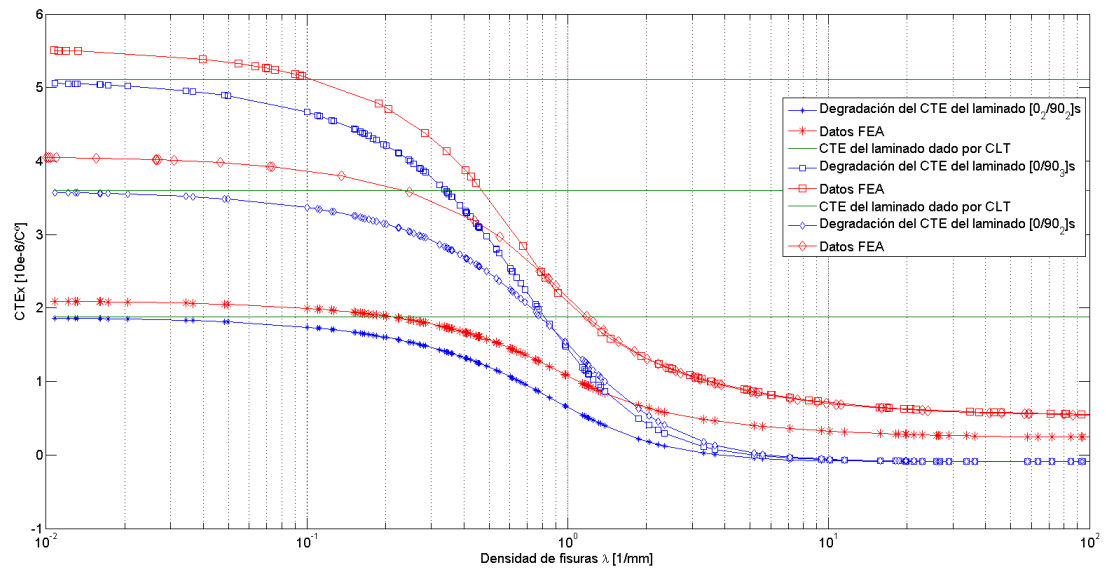


Figura 5.8: Degradación del CTE del laminado vs densidad de fisuras para los laminados  $[0/90_2]_s$ ,  $[0/90_3]_s$  y  $[0_2/90_2]_s$  tipo Avimid K Polymer/IM6 comparándola con datos FEA.

### 5.1.2. Tensiones intralaminares.

A la vista de los resultados anteriores, el modelo calcula la pérdida de rigidez  $E_x(\lambda)$  del laminado suponiendo un valor constante e igual al módulo dado por CLT con  $\lambda = 0$ , menos un conjunto de perturbaciones escritas según la ecuación (3.63). Por otro lado, las tensiones intralaminares son necesarias cerca de la fisura para transferir la carga entre la lámina fisurada (denotada por el subíndice  $k$ ) y las láminas no fisuradas (denotadas por el subíndice  $m$ ). Estas tensiones intralaminares desaparecen a medida que nos alejamos de la fisura y una vez ha sido distribuida la carga en el resto del laminado.

En la Figura 5.9, se muestran las tensiones intralaminares  $\tau_{xz}(x)$  para la interfaz 0/90 en un laminado  $[0_2/90_4]_s$  entre dos fisuras localizadas en  $x = \pm l$ , y en la Figura 5.10, para las dos interfaces 0/  $\pm 15$  y  $\pm 15/90$  del laminado  $[0/\pm 15/90_2]_s$ , ambos laminados para un material tipo Fiberite/HyE 9082A. Recalcar, que las  $\tau_{xz} = 0$  en la superficie media debido a la simetría del laminado.

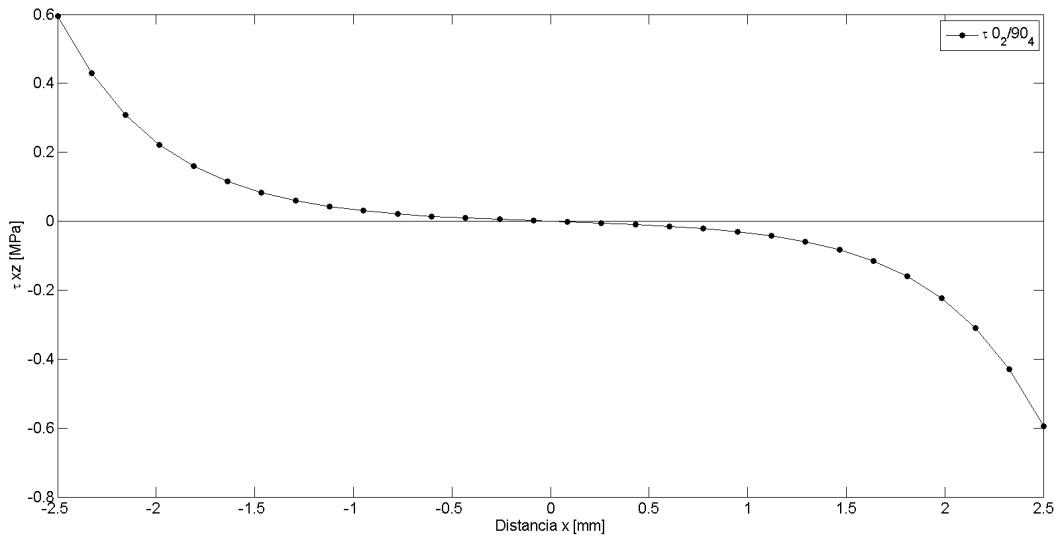


Figura 5.9: Tensión intralaminar  $\tau_{xz}(x)$  en la interfaz 0/90 del laminado  $[0_2/90_4]_s$  tipo Fiberite/Hye-9082-A, con una densidad de fisuras  $\lambda = 0,2 [mm^{-1}]$ .

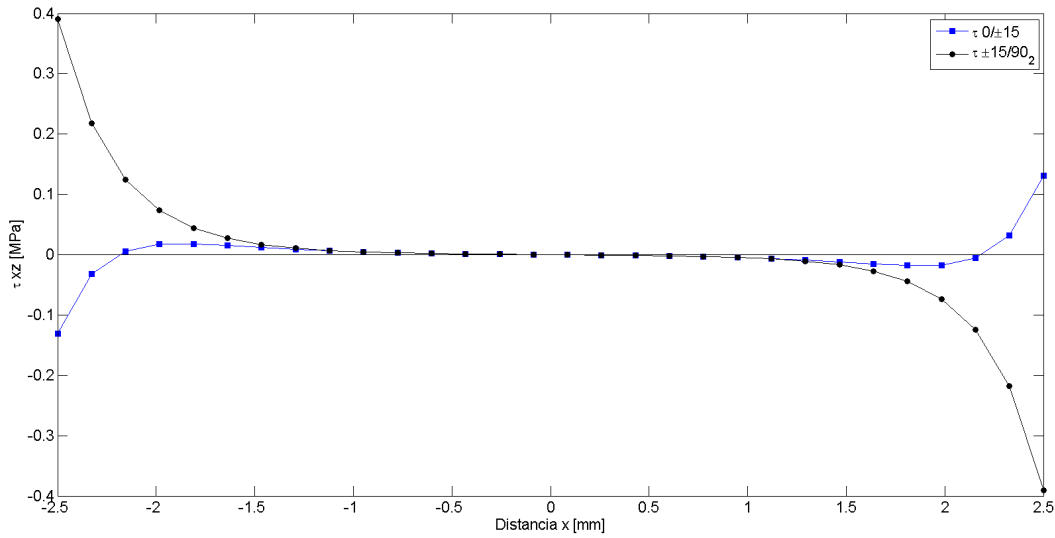


Figura 5.10: Tensiones intralaminares  $\tau_{xz}(x)$  en las interfaces  $0/\pm 15$  y  $\pm 15/90$  del laminado  $[0/\pm 15/90_2]_s$  tipo Fiberite/Hye-9082-A, con una densidad de fisuras  $\lambda = 0,2 \text{ [mm}^{-1}\text{]}$ .

Se puede apreciar como en zonas muy próximas a la fisura, aparecen tensiones de cortadura  $\tau_{xz}$  fuera del plano y cómo, a medida que nos alejamos, se reducen dichas tensiones en forma de  $\sinh(x)$ . También se aprecia, que en zonas suficientemente alejadas del campo perturbado, la lámina fisurada sigue soportando carga y por tanto, la deformación es aproximadamente igual a,  $\varepsilon_x^o$ , el cual significa, que la lámina fisurada sigue soportando carga en zonas suficientemente alejadas de la fisura. A medida que el rango entre dos fisuras consecutivas es menor, la zona que soporta carga va siendo mas pequeña hasta que dicha lámina se encuentra totalmente fisurada y por tanto, no soporta carga ni en el extremo de la fisura ni en zonas alejadas. Este fenómeno físico de fisuración, se puede asemejar a una condición de borde libre como sucede en el borde de cualquier laminado y donde se asume CLT como válido en zonas suficientemente alejadas. En el análisis de Pagano (Pagano and Piper, 1970), las tensiones de cortadura fuera del plano eran máximas justo en el borde y disminuían de manera exponencial a medida que nos alejábamos.

Las tensiones intralaminares  $\tau_{xz}(z)$  a través del espesor, son calculadas en el extremo de la fisura localizada en  $x = +l$  como se muestra en la Figura 5.11 para el laminado  $[0_2/90_4]_s$  de un material Fiberite/HyE 9082A. Además,  $\tau_{xz} = 0$  en la superficie media e inferior del laminado, debido a la simetría y a la condición de superficie libre respectivamente.

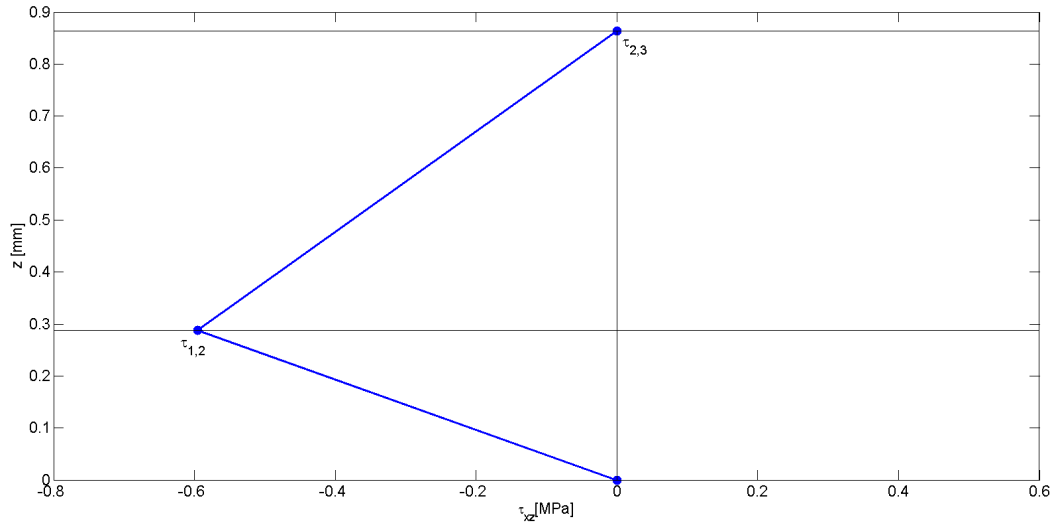


Figura 5.11: Tensión intralaminar  $\tau_{xz}(l)$  a través del espesor de un laminado  $[0_2/90_4]_s$  tipo Fiberite/Hye-9082-A, con una densidad de fisuras  $\lambda = 0,2 \text{ [mm}^{-1}\text{]}$ .

Téngase en cuenta, que las tensiones intralaminares de la Figura 5.11 para el laminado  $[0_2/90_4]_s$ , se han obtenido modelando las láminas con iguales orientaciones y grupos  $[\pm\theta]$ , como una única lámina equivalente. Esta aproximación, se puede refinar subdividiendo las láminas individuales en  $n$  subláminas en vez de agruparlas en una sola lámina. Esto no se puede hacer con la lámina fisurada porque la fisura se expande a todo el espesor (láminas transversales contiguas). Para mostrar el efecto de refinamiento, las tensiones intralaminares a través del espesor  $\tau_{xz}(z)$ , se han calculado en el extremo de la fisura ( $x = +l$ ) para el laminado  $[0_2/90_4]_s$  con  $n = 1$  en la Figura 5.11, en la Figura 5.12 para  $n = 2$ , en la Figura 5.13 para  $n = 4$  y en la Figura 5.14 para  $n = 8$ , siendo  $n$ , el número de subláminas en las que se divide la lámina  $[0_2]$ .

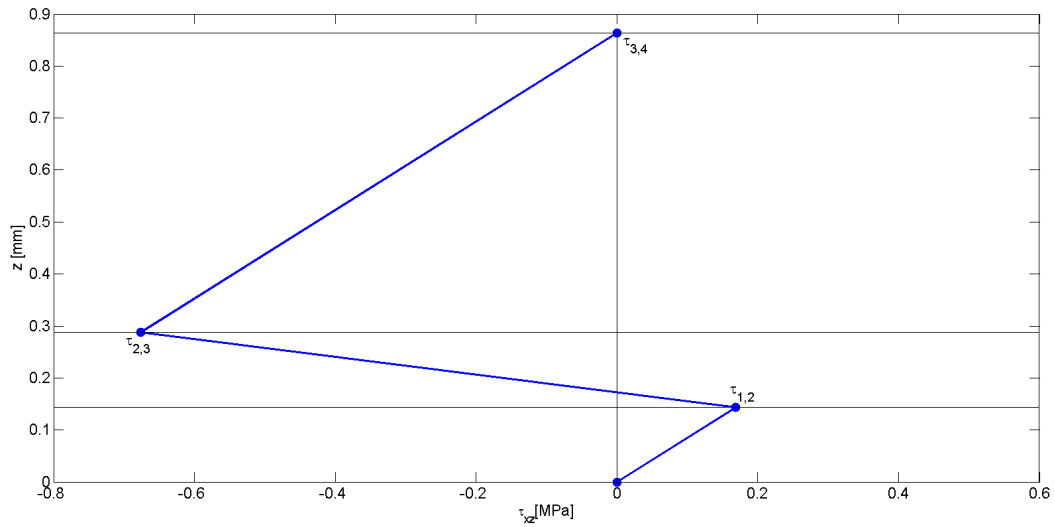


Figura 5.12: Tensión intralaminar  $\tau_{xz}(l)$  a través del espesor de un laminado  $[0_2/90_4]_s$  tipo Fiberite/Hye-9082-A con la lámina  $[0_2]$  dividida en dos sublaminas y una densidad de fisuras  $\lambda = 0,2 \text{ [mm}^{-1}\text{]}$ .

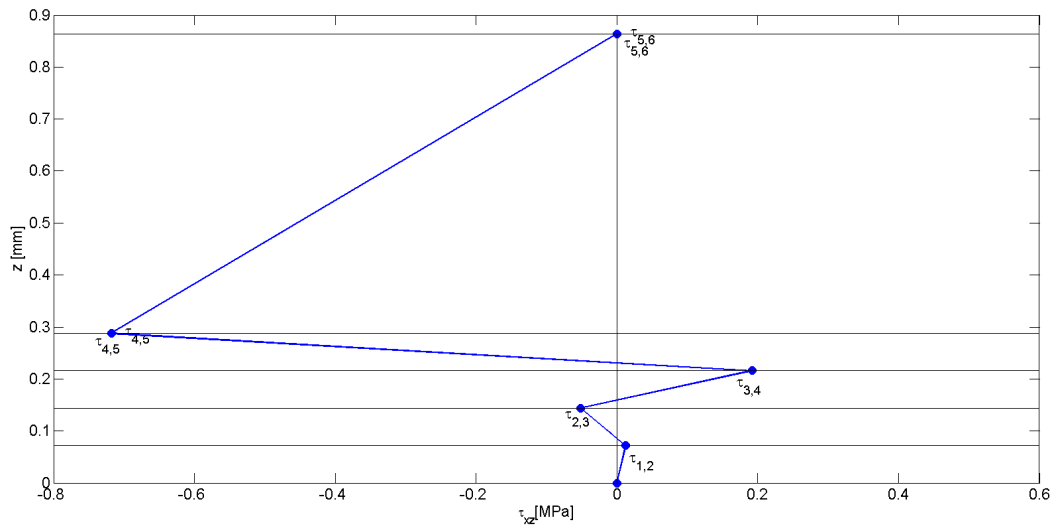


Figura 5.13: Tensión intralaminar  $\tau_{xz}(l)$  a través del espesor de un laminado  $[0_2/90_4]_s$  tipo Fiberite/Hye-9082-A con la lámina  $[0_2]$  dividida en cuatro sublaminas y una densidad de fisuras  $\lambda = 0,2 \text{ [mm}^{-1}\text{]}$ .

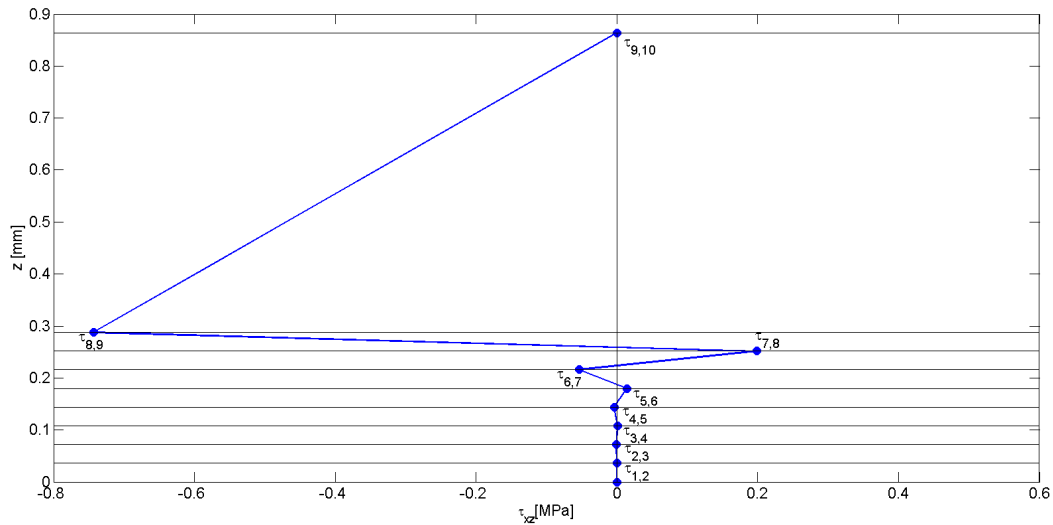


Figura 5.14: Tensión intralaminar  $\tau_{xz}(l)$  a través del espesor de un laminado  $[0_2/90_4]_s$  tipo Fiberite/Hye-9082-A con la lámina  $[0_2]$  dividida en ocho sublaminas y una densidad de fisuras  $\lambda = 0,2 \text{ [mm}^{-1}\text{]}$ .

Se puede apreciar, que el valor máximo de las tensiones intralaminares se incrementa con el número de sublaminas para la interfaz  $0/90$ . Esto significa, que la aproximación de distribuciones lineales para las tensiones intralaminares a lo largo del espesor no es exacta y cuyo valor máximo converge con el número de sublaminas. Esta convergencia se muestra en la Figura 5.15 para los laminados  $[0_2/90_4]_s$  y  $[0/\pm 15/90_2]_s$  como función de  $n$ .

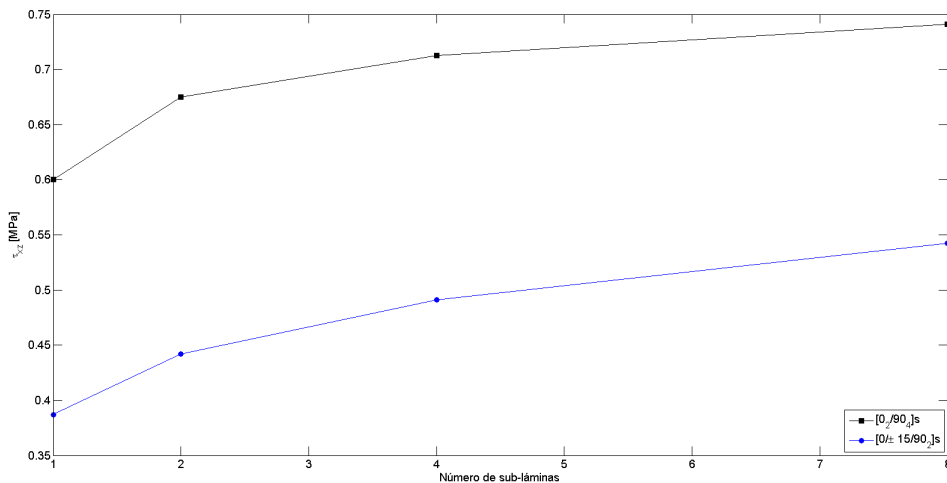


Figura 5.15: Máxima tensión intralaminar  $\tau_{xz}(l)$  como función del número de sublaminas en la lámina  $[0_2]$  y  $[\pm 15]$ .

En la Figura 5.14, también se puede apreciar que el gradiente de tensiones intralaminares se confina a las proximidades de la interfaz 0/90 y desaparece según los alejamos. Vale la pena notar, que todas las formulaciones en la literatura, usan distribuciones lineales tanto en los grupos  $\pm\theta$  como en toda la parte intacta del material como si fuese un solo bloque equivalente no dañado respecto a la lámina fisurada (Tan and Nuismer, 1989; Nuismer and Tan, 1988; Mayugo et al., 2010) y por tanto, la exactitud de esos modelos no es tan buena.

### 5.1.3. Campo de desplazamientos

En esta sección, se analizarán las funciones elementales que describen el campo de desplazamientos dentro de un laminado, en concreto para el laminado E.

A la izquierda de la Figura 5.16, se ilustran las funciones elementales  $Z_i$  que resultan de la solución exacta al problema (3.58) para el laminado:  $[0/\pm 15/90_2]_s$ . Se puede apreciar que la función  $Z_3$  es lineal, resultando ser la *componente* lineal de la deformación homogénea del desplazamiento  $\hat{u}_i = V_{i3}Z_3$  para todas las láminas  $i$ , es decir, la constante de deformación  $\varepsilon_x^o$ , también llamada *solución fundamental*. El resto de componentes son perturbaciones que aparecen en la solución exacta (3.58) para producir las tensiones intralaminares que se encargan de redistribuir la carga entre la lámina fisurada y las no fisuradas. A la derecha de la Figura 5.16, se muestran los desplazamientos promediados perturbados en cada lámina ( $\hat{u}_i - \varepsilon_x^o$ ).

En la literatura, se define la *longitud inefectiva*  $\delta$  como la distancia a la cual las perturbaciones decrecen hasta un 10% de su valor máximo (Rosen, 1964; Barbero and Kelly, 1993; Kelly and Barbero, 1993), y normalmente es asumida pero no calculada debido a la dificultad que supone. En este modelo, se calcula la longitud inefectiva  $\delta$  a partir de la solución (3.44) para las Figuras 5.9 y 5.10, y los resultados se muestran en la siguiente Tabla 5.3. Además, la tensión residual en la lámina dañada nunca se reduce a cero como se considera en los modelos de evolución de daño usados en (E. J. Barbero and Wheadon, 2013).

<i>Laminado</i>	<i>Interfaz</i>	$\delta$ [mm]	$\tau_{xz}$ [MPa]
[0/ $\pm 15/90_2$ ]s	0/ $\pm 15$	0,975	0.12
	$\pm 15/90_2$	0,74	0.387
[0 <sub>2</sub> /90 <sub>4</sub> ]s	0 <sub>2</sub> /90 <sub>4</sub>	1,207	0.598

Tabla 5.3: Cálculo de la longitud inefectiva  $\delta$ .



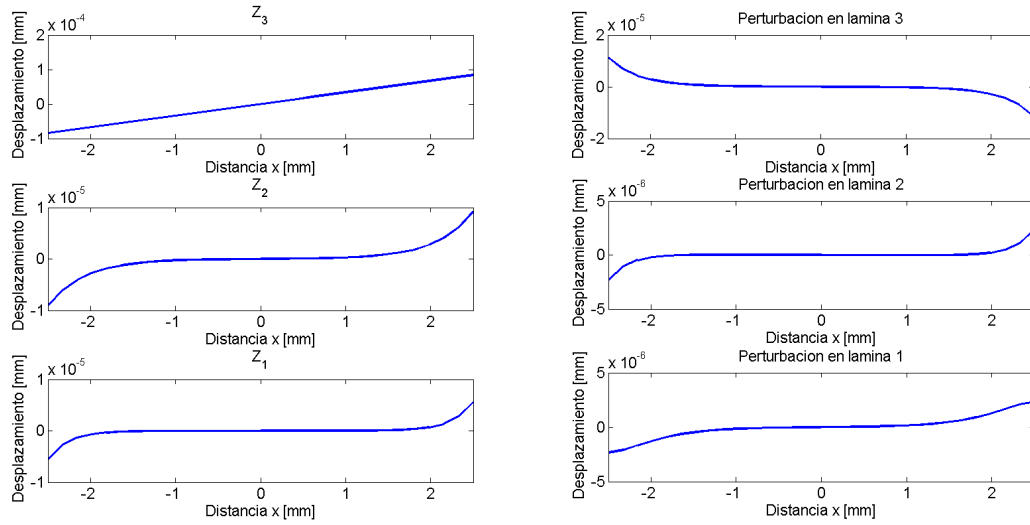


Figura 5.16: Izquierda: funciones elementales. Derecha: Desplazamientos promediados perturbados. Laminado  $[0/\pm 15/90_2]_s$  con una densidad de fisuras  $\lambda = 0,2 \text{ [mm}^{-1}\text{]}$ .

#### 5.1.4. Número de condición

El número de condición para un problema de autovalores, se define como la división entre el máximo y mínimo autovalor. Ordenando los autovalores en orden descendente, el número de condición del problema (3.58) es:  $C_n = \lambda_1/\lambda_n \gg 1$ , cuyos valores no son favorables para la computación por ordenador. Por otra parte, el número de condición del problema (3.63) es:  $C_{n-1} = \lambda_1/\lambda_{n-1} \sim 10^1$  y por lo tanto, usando la ecuación (3.63) en vez de la ecuación (3.58), nos permitirá resolver el mismo problema pero con un número de condicion  $C_{n-1} \simeq O(1)$ . En la Tabla 5.4 se muestra una comparación entre el número de condición original del problema de autovalores (3.58) y el nuevo (3.63).

<i>Material</i>	<i>Laminado</i>	$C_n$	$C_{n-1}$	$\lambda_1$	$\lambda_{n-1}$	$\lambda_n$
C	$[0_2/90_4]s$	$2,584e + 16$	6,736	-3.622	-0.537	-1.401e-16
C	$[0/\pm 15/90_2]s$	$3,648e + 15$	3,216	-17.059	-5.303	-4.675e-15
C	$[\pm 15/90_4]s$	$9,118e + 15$	4	-20.891	-5.223	-2.231e-15
C	$[\pm 30/90_4]s$	$8,729e + 16$	4	-29.105	-7.276	-3.334e-16
C	$[\pm 40/90_4]s$	$9,436e + 15$	4	-38.471	-9.618	-4.077e-15
C	$[0/90_8/0_{1/2}]s$	$4,092e + 18$	4,960	-7.792	-1.571	-1.904e-18
G	$[0/90_2]s$	$3,961e + 16$	19,922	-10.655	-0.535	-2.690e-16
G	$[0/90_3]s$	$3,546e + 16$	14,837	-5.454	-0.368	-1.538e-16
G	$[0_2/90_2]s$	$7,398e + 16$	33,096	-8.117	-0.245	-1.097e-16

C:IM6(Carbon)/Avimid-K;    G: Fiberite(Glass)/HyE-9082A

*Tabla 5.4: Número de condición  $C$  y autovalores  $\lambda$ .*

## 5.2. Resultados en laminados poliméricos en condiciones de flexión pura

El modelo de daño en condiciones de flexión pura, también ha sido implementado en MATLAB R2013 para obtener tanto la degradación del laminado a flexión ( $E_x^b(\lambda)$ ), como las curvaturas térmicas globales ( $\alpha_{CTEx}^*(\lambda)$ ). En el presente estudio se analizarán de nuevo laminados simétricos balanceados  $[0_m/90_n/\pm\theta_r]_s$ , y cruzados  $[0_m/90_n]_s$  bajo la influencia de láminas a  $90^\circ$  sometidas a tracción con fisuras en la matriz tanto en laminados de fibra de vidrio/epoxy (J. Varna and Talreja, 1999, 2001) como de fibra de carbono/epoxy (Liu and Nairn, 1992).

Los resultados numéricos y conclusiones en esta sección, están divididos en cuatro partes:

- En primer lugar, se calcula la degradación de rigidez y el CTE\* (curvaturas térmicas) para un conjunto de laminados de acuerdo al modelo unidimensional descrito en el capítulo 4. Los resultados arrojados para este modelo en laminados de fibra de vidrio/epoxy y fibra de carbono/epoxy, no serán comparados con ningún tipo de datos (experimentales o por elementos finitos) puesto que no se han encontrado datos fiables en la literatura.
- En segundo lugar, se presentan resultados de las tensiones intralaminares que se producen en el extremo de la fisura y a lo largo del RVE para dos configuraciones distintas.
- En tercer lugar, se analizarán las funciones elementales que, mediante una combinación lineal, proporcionan los ángulos promediados de cada una de las láminas del laminado y dan solución al problema (4.64).
- Por último, se analizará el número de condición de la matriz de autovalores  $[\lambda]$  y los problemas numéricos que puede ocasionar.

Las propiedades de los materiales utilizados se recogen en la Tabla 5.1 mostrados en la sección anterior y en la siguiente Tabla 5.5, se recogen las distintas configuraciones empleadas y el objetivo de estudio en cada uno de los laminados.

<i>Propiedades</i>	<i>Secuencia del laminado</i>	<i>Objeto de estudio</i>
<i>A</i>	$[0_2/90_4]_s$ ( <i>Varna</i> )	$E_x^b(\lambda), \alpha_{CTEx}^*(\lambda), \tau_{xz}^i$
<i>B</i>	$[90_4/0_2]_s$ ( <i>Varna</i> )	$E_x^b(\lambda), \alpha_{CTEx}^*(\lambda)$
<i>C</i>	$[\pm 15/90_4]_s$ ( <i>Varna</i> )	$E_x^b(\lambda), \alpha_{CTEx}^*(\lambda)$
<i>D</i>	$[\pm 30/90_4]_s$ ( <i>Varna</i> )	$E_x^b(\lambda), \alpha_{CTEx}^*(\lambda)$
<i>E</i>	$[\pm 40/90_4]_s$ ( <i>Varna</i> )	$E_x^b(\lambda), \alpha_{CTEx}^*(\lambda)$
<i>H</i>	$[0/\pm 15/90_2]_s$ ( <i>Varna</i> )	$\tau_{xz}^i$
<i>I</i>	$[0/90_3]_s$ ( <i>Nairn</i> )	$E_x^b(\lambda), \alpha_{CTEx}^*(\lambda)$
<i>J</i>	$[90_3/0]_s$ ( <i>Nairn</i> )	$E_x^b(\lambda), \alpha_{CTEx}^*(\lambda)$

Tabla 5.5: Lista de laminados de estudio.

### 5.2.1. Análisis de la rigidez y CTE

A continuación, se presentan los resultados del programa de MATLAB R2013 desarrollado para este modelo en función de la densidad de fisuras ( $\lambda$ ) como se hizo en el capítulo anterior. Primero el programa carga un archivo Excel con densidades de fisuras entre 0,01 y 700, supuestos en un laminado genérico bajo las condiciones descritas en la sección 4.1. Tras cargar los datos, el programa solicita las condiciones de carga  $\{\hat{\sigma}, \Delta T\}$  para calcular la pérdida rigidez a flexión del laminado o el CTE\* correspondiente. Como se ha comentado anteriormente, a diferencia del modelo anterior, no existen datos ni experimentales ni por elementos finitos fiables con los que comparar estos resultados.

En las Figuras 5.17, 5.18 y 5.19, se muestra el módulo a flexión del laminado no dañado que coincide con el módulo a flexión calculado mediante teoría clásica de laminados y la pérdida de rigidez a flexión  $E_x^b(\lambda)$  se calcula mediante la ecuación (4.84). Esta pérdida de rigidez es causada físicamente por las fisuras y numéricamente capturada por las  $N - 1$  perturbaciones de la solución (4.64).

En la Figura 5.17, se muestra la pérdida de rigidez a flexión en función de la densidad de fisuras ( $\lambda$ ) para los laminados A y B. El módulo a flexión desciende un 7,9 % (de 35,42 a 32,59 MPa) para el laminado  $[0_2/90_4]_s$  y un 57,6 % (de 13,72 a 5,82 MPa) para el laminado  $[90_4/0_2]_s$ . Este último laminado empieza con un módulo a flexión bajo porque las láminas transversales, que son las menos rígidas, se encuentran en los extremos del laminado (la rigidez a flexión es mayor cuanto mayor sea el cubo de la distancia respecto de las láminas más rígidas) y por tanto, como la lámina fisurada se encuentra en el exterior también, se pierde un gran porcentaje de la rigidez a flexión.

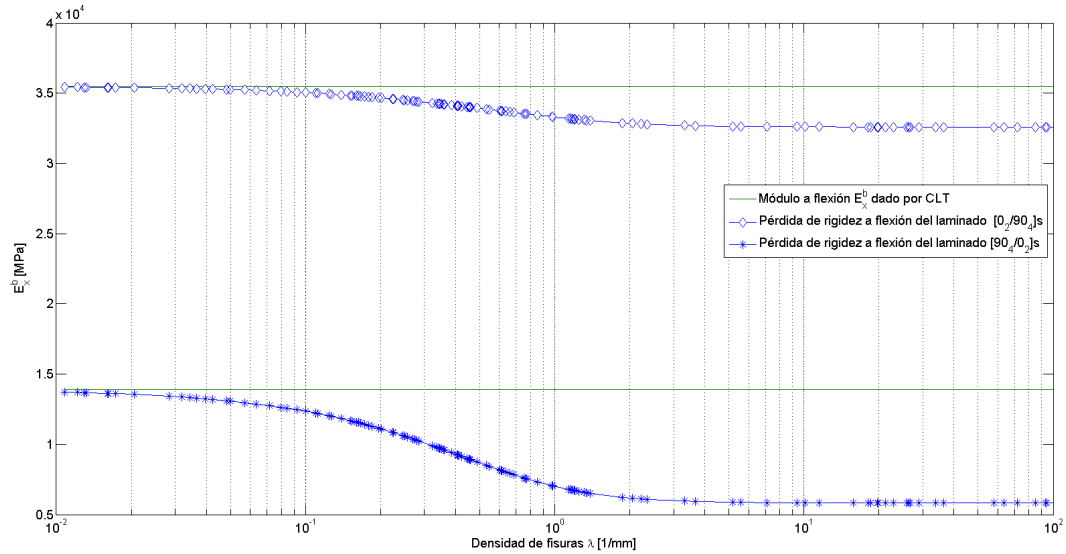


Figura 5.17: Pérdida de rigidez a flexión vs. densidad de fisuras para los laminados  $[0_2/90_4]_s$  y  $[90_2/0_2]_s$  tipo Fiberite/HyE-9082A.

En la Figura 5.18, se muestra la pérdida de rigidez a flexión en función de la densidad de fisuras ( $\lambda$ ) para los laminados C,D y E. El módulo a flexión desciende un 10,1 % (de 32,22 a 28,97 MPa) para el laminado  $[\pm 15/90_4]_s$ , un 11,9 % (de 24,37 a 20,23 MPa) para el laminado  $[\pm 30/90_4]_s$ , y un 21,7 % (de 19,11 a 14,95 MPa) para el laminado  $[\pm 40/90_4]_s$ . El último laminado tiene un módulo a flexión mas bajo que los demás porque las láminas a  $\pm 40^\circ$ , que son las menos rígidas de todas, se encuentran en el exterior del laminado (la rigidez a flexión es mayor cuanto mayor sea el cubo de la distancia respecto de las láminas más rígidas) y como la rigidez de las láminas transversales no difiere tanto de la rigidez de las láminas a  $\pm 40^\circ$ , la lámina fisurada representa un alto porcentaje de la rigidez total del laminado.

En la Figura 5.19, se muestra la pérdida de rigidez a flexión en función de la densidad de fisuras ( $\lambda$ ) para los laminados I y J. EL módulo a flexión desciende 4,4 % (de 82,01 a 78,42 MPa) para el laminado  $[0/90_3]_s$  y un 54,4 % (de 11,76 a 5,35 MPa) para el laminado  $[90_3/0]_s$ . Este último laminado empieza con un módulo a flexión bajo porque las láminas transversales, que son las menos rígidas, se encuentran en los extremos del laminado (la rigidez a flexión es mayor cuanto mayor sea el cubo de la distancia respecto de las láminas más rígidas) y por tanto, como la lámina fisurada se encuentra en el exterior también, se pierde un gran porcentaje de la rigidez a flexión total.

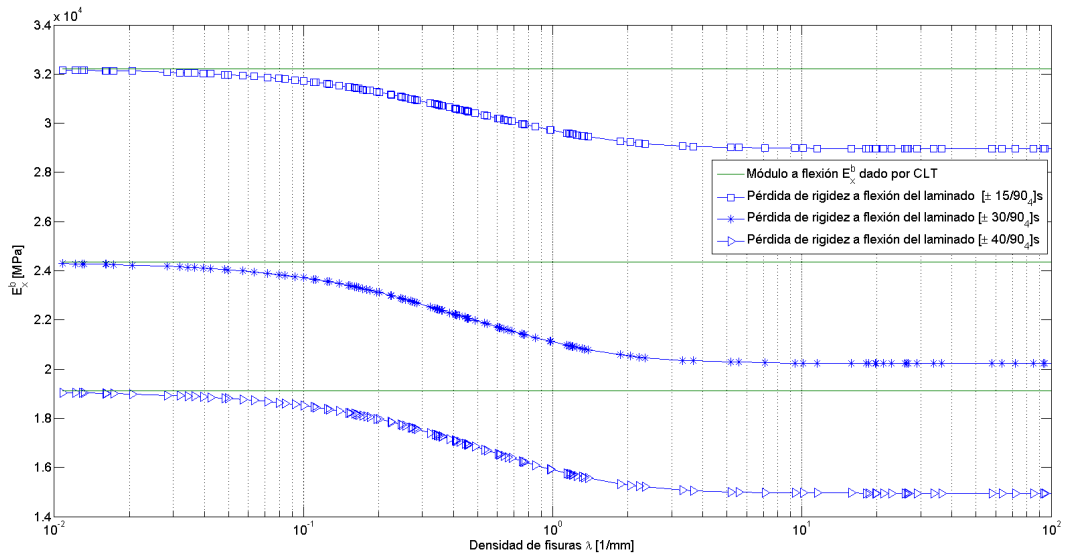


Figura 5.18: Pérdida de rigidez a flexión vs. densidad de fisuras para el laminado  $[\pm\theta/90_4]_s$  tipo Fiberite/HyE-9082A con  $\theta = 15, 30, 40$ .

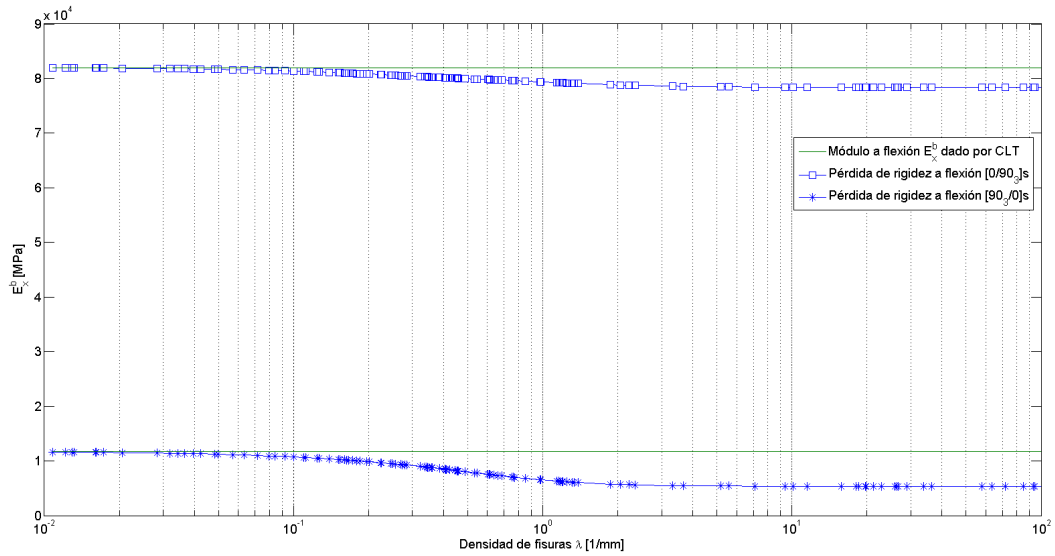


Figura 5.19: Pérdida de rigidez a flexión vs. densidad de fisuras para los laminados  $[0/90_3]_s$  y  $[90_3/0]_s$  tipo Avimid-K/IM6.

En las siguientes figuras se muestran las curvaturas térmicas (CTE\*) para los distintos laminados. En La Figura 5.20, se muestra la degradación del CTE\* para los laminados A y B, en la Figura 5.21 para los laminados C,D y E, y en la Figura 5.22 para los laminados I y J.

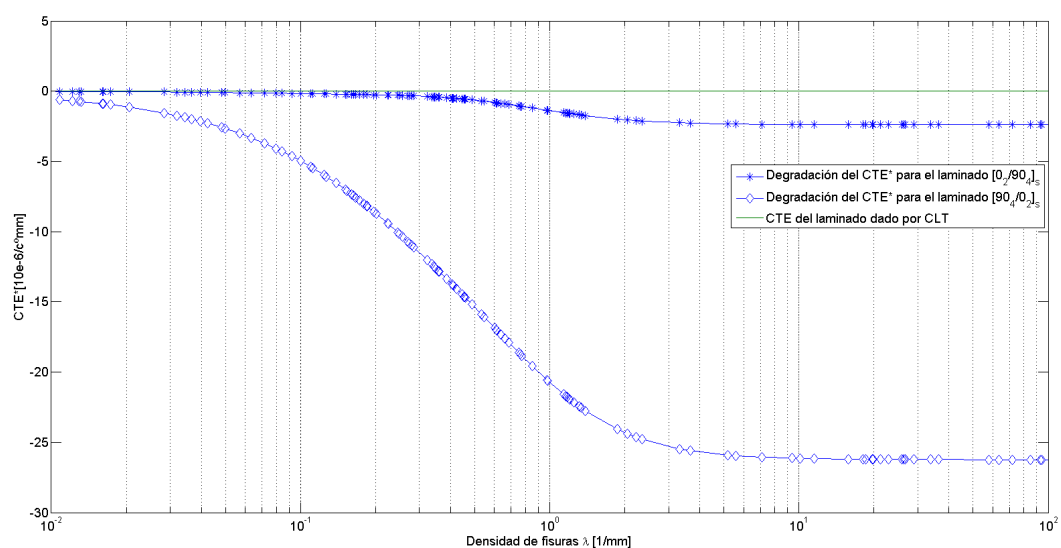


Figura 5.20: Degradación del  $CTE^*$  del laminado vs. densidad de fisuras para los laminados  $[0_2/90_4]_s$  y  $[90_4/0_2]_s$  tipo Fiberite/HyE-9082A.

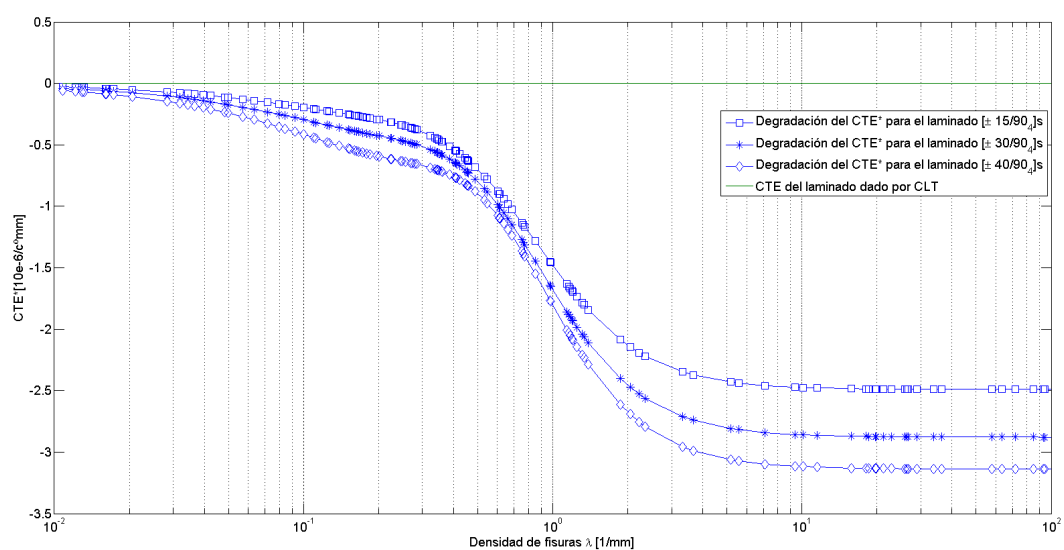


Figura 5.21: Degradación del  $CTE^*$  del laminado vs. densidad de fisuras para el laminado  $[\pm\theta/90_4]_s$  tipo Fiberite/HyE-9082A con  $\theta = 15, 30, 40$ .

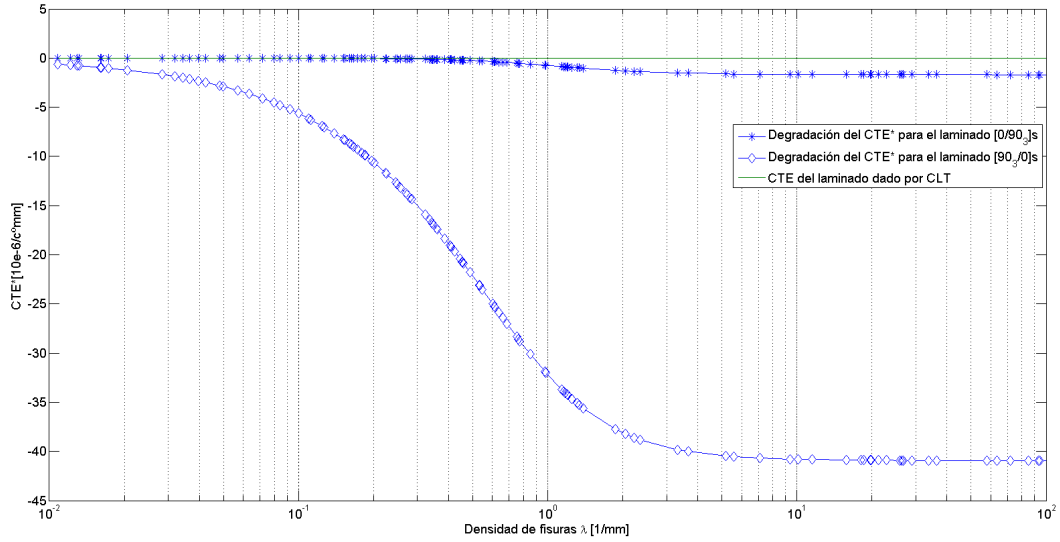


Figura 5.22: Degradación del  $CTE^*$  del laminado vs. densidad de fisuras para los laminados  $[0/90_3]_s$  y  $[90_3/0]_s$  tipo Avimid-K/IM6.

Como se observa en las Figuras 5.20, 5.21 y 5.22, a medida que la densidad de fisuras aumenta en el laminado, aparece una curvatura térmica para un incremento de temperatura. Cuando el laminado se encuentra intacto (no dañado,  $\lambda = 0$ ), éste permanece simétrico evitándose cualquier acoplamiento axil-flexión que produzca una curvatura para un  $\Delta T$  dado, pero a medida que la densidad de fisuras aumenta, el laminado deja de ser simétrico y se produce un acoplamiento axil-flexión que produce una curvatura, en este caso negativa. Este  $CTE^*$  negativo, se debe a que las láminas fisuradas (láminas transversales sometidas a tracción) solo se producen en la parte superior respecto al plano medio del laminado según los ejes  $x, z$  de la Figura 4.1. A diferencia de como se describía la curvatura en el capítulo 4 (momento positivo hacia abajo), cuando aplicamos un  $\Delta T$ , la carga térmica equivalente de la mitad inferior del laminado respecto al plano medio, es mayor que la carga térmica equivalente de la otra mitad superior, y de esta manera, la curvatura que experimenta el laminado se produce hacia arriba (momento negativo hacia arriba).



### 5.2.2. Tensiones intralaminares

A la vista de los resultados anteriores, el modelo calcula la pérdida de rigidez a flexión  $E_x^b(\lambda)$  del laminado suponiendo un valor constante e igual al módulo dado por CLT con  $\lambda = 0$ , menos un conjunto de perturbaciones escritas según la ecuación (4.64). Además, las tensiones intralaminares son necesarias cerca de la fisura para transferir la carga entre las láminas no dañadas (denotadas por el subíndice  $m$ ) y la lámina fisurada (denotada por el subíndice  $k$ ). Estas tensiones intralaminares desaparecen a medida que nos alejamos de la fisura una vez la carga ha sido redistribuida en el laminado.

En la Figura 5.23, se muestran las tensiones interlaminares  $\tau_{xz}(x)$  para las tres interfaces de un laminado  $[0_2/90_4]_s$  entre dos fisuras localizadas en  $x = \pm\ell$ , y en la Figura 5.24, para las cinco interfaces de un laminado  $[0/\pm 15/90_2]_s$ , ambos de un material tipo Fiberite/HyE-9082A. En la leyenda, las interfaces  $\pm\theta$  son denotadas por una par de láminas balanceadas y las tensiones interlaminares  $\tau_{xz}$  son nulas en el borde superior e inferior del laminado al ser superficies libres.

Como sucedía en el modelo anterior, las tensiones de cortadura  $\tau_{xz}$  aparecen cerca del extremo de la fisura y a medida que nos alejamos, se reducen dichas tensiones en forma de  $\sinh(x)$ . También se aprecia, que en zonas suficientemente alejadas del campo perturbado, la lámina fisurada sigue soportando carga y por tanto, la curvatura es aproximadamente igual a,  $k_x^o$ , es decir, la solución fundamental dada por teoría clásica de laminados. Cuando el rango entre dos fisuras consecutivas es muy pequeño, la zona que aún soporta carga es casi nula.

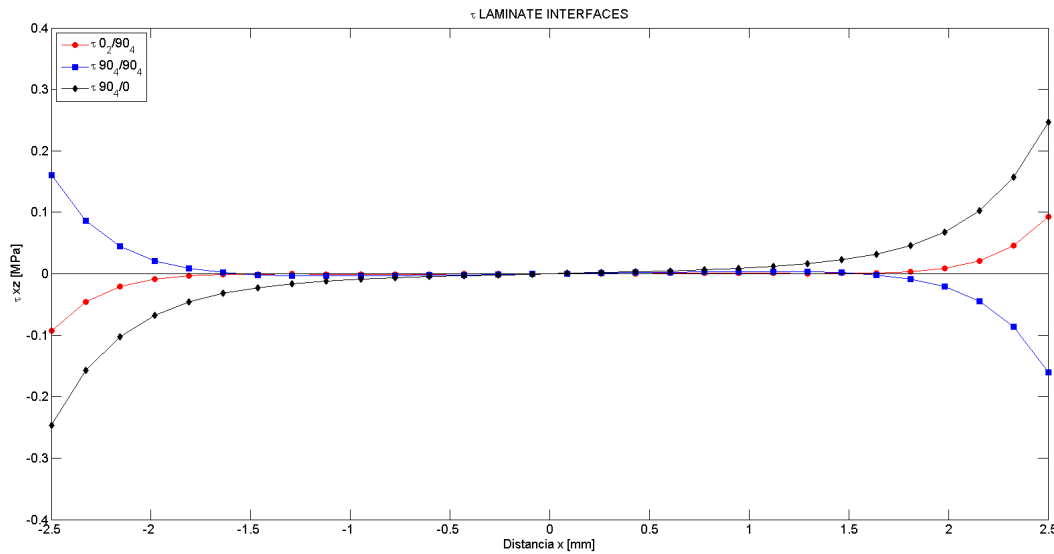


Figura 5.23: Tensiones interlaminares  $\tau_{xz}(x)$  en las tres interfaces de un laminado  $[0_2/90_4]_s$  tipo Fiberite/HyE-9082A con una densidad de fisuras  $\lambda_k = 0,2 \text{ [mm}^{-1}\text{]}$ .

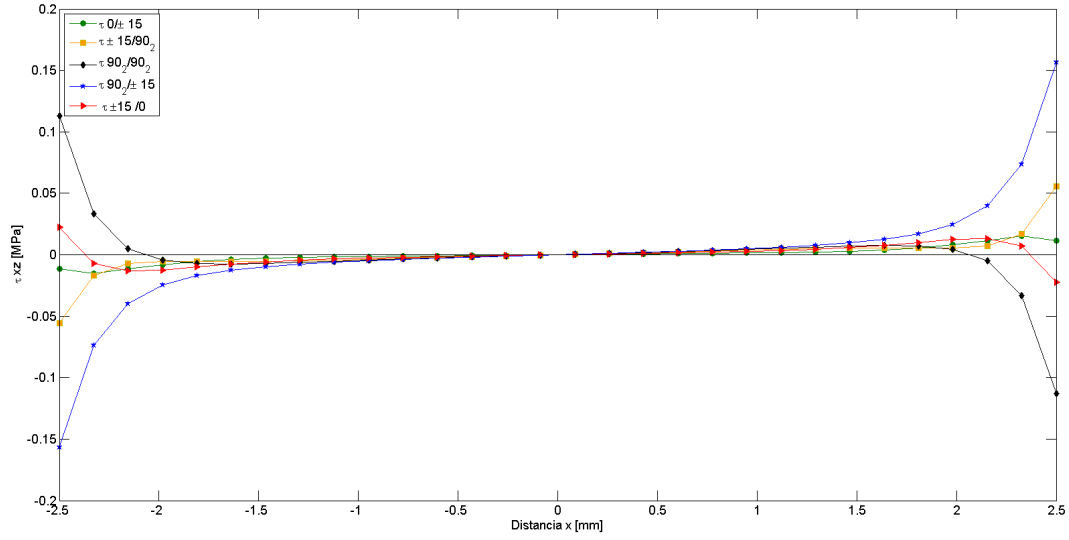


Figura 5.24: Tensiones interlaminares  $\tau_{xz}(x)$  en las cinco interfaces de un laminado  $[0/\pm 15/90_2]_s$  tipo Fiberite/HyE-9082A con una densidad de fisuras  $\lambda_k = 0,2 [mm^{-1}]$ .

En la Figura 5.25, se calculan las tensiones intralaminares  $\tau_{xz}(z)$  a través del espesor en la superficie de la fisura ( $x = +\ell$ ) para el laminado  $[0_2/90_4]_s$  de un material tipo Fiberite/HyE-9082A. De nuevo, recalcar que  $\tau_{xz} = 0$  en la parte inferior y superior del laminado al ser superficies libres. El espesor de la fisura (expandida a las láminas transversales contiguas) es:  $4t_k + e_b$ , donde  $t_k = 0,144$  mm es el espesor inicial de cada lámina y  $e_b = 0,0103$  mm, es la nueva posición del eje neutro calculada mediante la ecuación (4.20).

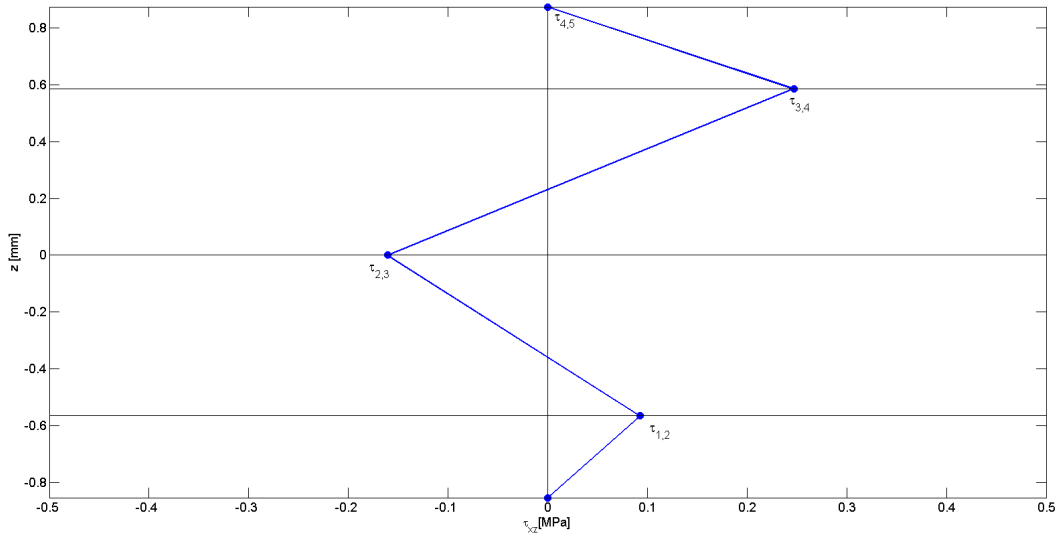


Figura 5.25: Tensión intralaminar  $\tau_{xz}(\ell)$  a través del espesor de un laminado  $[0_2/90_4]_s$  tipo Fiberite/HyE-9082A, con una densidad de fisuras  $\lambda_k = 0,2 [mm^{-1}]$ .

Téngase en cuenta, que las tensiones intralaminares de la Figura 5.25 para el laminado  $[0_2/90_4]_s$ , se han obtenido modelando las láminas con iguales orientaciones y grupos  $[\pm\theta]$ , como una única lámina equivalente. Esta aproximación, como sucedía en el modelo anterior, se puede refinar subdividiendo las láminas individuales en  $n$  de sublaminas en vez de agruparlas en una sola. Esto no se puede hacer con la lámina fisurada porque la fisura se expande a todo el espesor (láminas transversales contiguas). Este efecto de refinamiento se muestra en la Figura 5.25 para un laminado  $[0_2/90_4]_s$  de material tipo Fiberite/HyE-9082A con  $n = 1$ , en la Figura 5.26 para  $n = 2$ , en la Figura 5.27 para  $n = 4$ , y la Figura 5.28 para  $n = 8$ , siendo  $n$ , el número de sublaminas en las que se divide la lámina  $[0_2]$ .

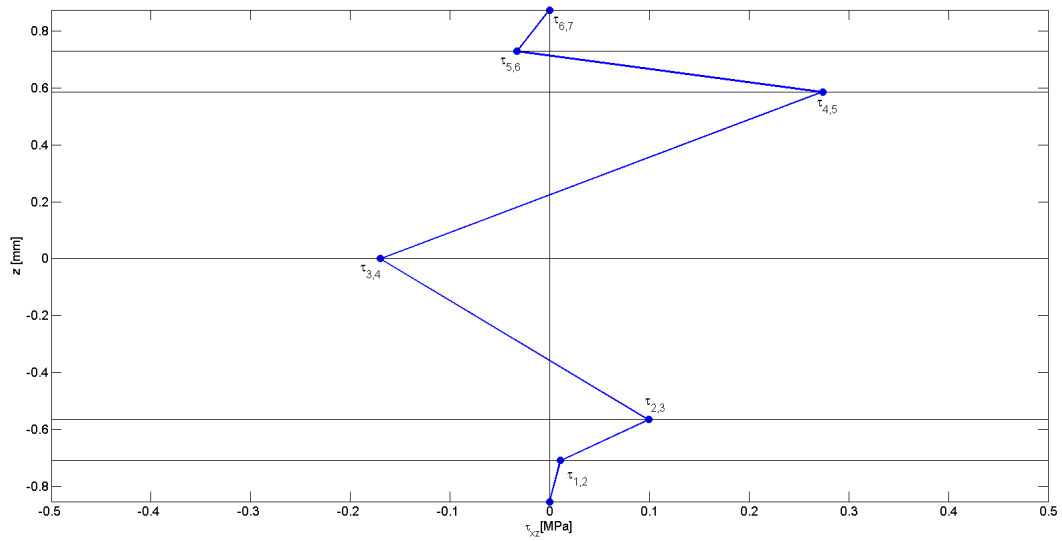


Figura 5.26: Tensión intralaminar  $\tau_{xz}(\ell)$  a través del espesor de un laminado  $[0_2/90_4]_s$  con la lámina  $[0_2]$  dividida en dos sublaminas y con una densidad de fisuras  $\lambda_k = 0,2 \text{ [mm}^{-1}\text{]}$ .

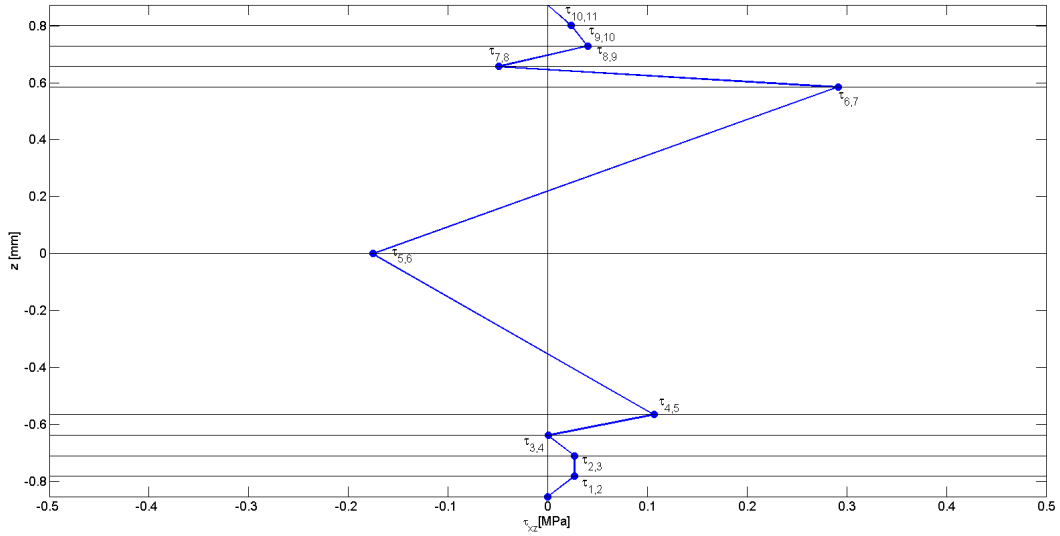


Figura 5.27: Tensión intralaminar  $\tau_{xz}(\ell)$  a través del espesor de un laminado  $[0_2/90_4]_s$  con la lámina  $[0_2]$  dividida en cuatro subláminas y con una densidad de fisuras  $\lambda_k = 0,2 \text{ [mm}^{-1}\text{]}$ .

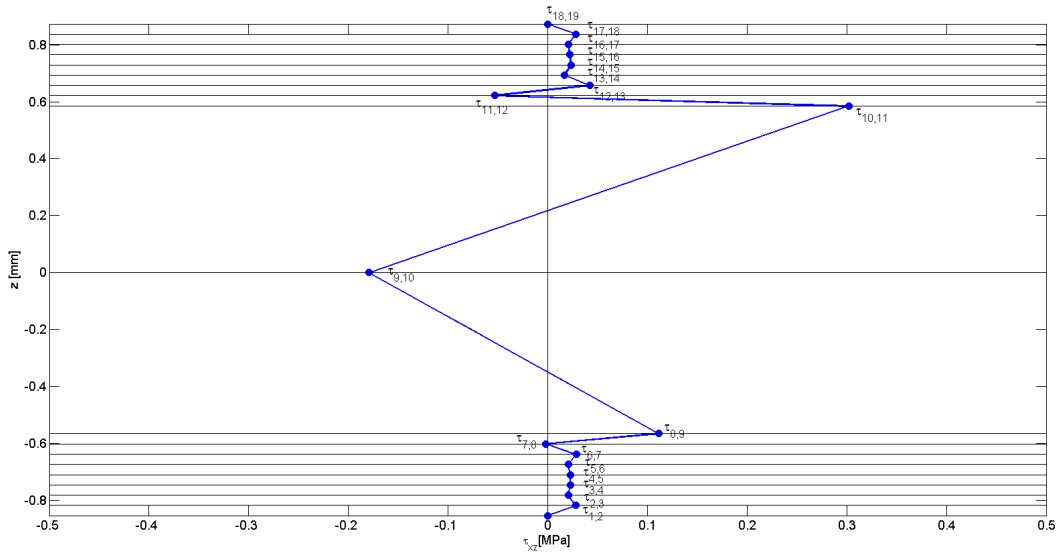


Figura 5.28: Tensión intralaminar  $\tau_{xz}(\ell)$  a través del espesor de un laminado  $[0_2/90_4]_s$  con la lámina  $[0_2]$  dividida en ocho subláminas y con una densidad de fisuras  $\lambda_k = 0,2 \text{ [mm}^{-1}\text{]}$ .

Se puede apreciar, cómo el valor máximo de las tensiones intralaminares que se producen en la interfaz 90/0 (etiquetada como  $\tau_{3/4}$ ,  $\tau_{4/5}$ ,  $\tau_{7/8}$  y  $\tau_{10/11}$  en las Figuras 5.25–5.28 respectivamente) se incrementa ligeramente con el número de subláminas. Esto significa que la aproximación de distribuciones lineales para las tensiones intralaminares no es exacta y este valor máximo, como sucedía en el modelo anterior, converge con el número de subláminas. En la Figura

5.29, se muestra esta convergencia para los laminados  $[0_2/90_4]_s$  y  $[0/\pm 15/90_2]_s$  en función de  $n$ .

En la Figura 5.28, también se puede apreciar que el gradiente de tensiones intralaminares que ocurre en las proximidades de la interfaz 90/0 (entre la lámina fisurada y las láminas adyacentes) se reduce rápidamente a medida que nos alejamos, es decir, que el efecto perturbado es muy sensible en zonas cercanas a la interfaz mientras que las láminas más alejadas apenas se ven afectadas. Además, vale la pena notar que todas las formulaciones en la literatura utilizan una distribución lineal de tensiones intralaminares, no sólo en la láminas balanceadas sino también, a todo un equivalente sublaminao que abarca toda la zona intacta (no dañada) tanto de la parte superior como inferior del laminado respecto de la lámina fisurada (Tan and Nuismer, 1989; Nuismer and Tan, 1988; Mayugo et al., 2010).

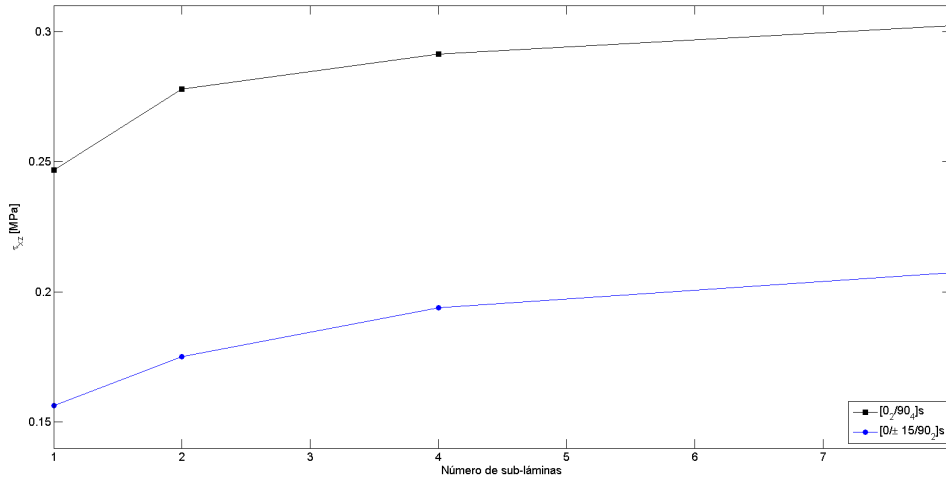


Figura 5.29: Máxima tensión intralaminar  $\tau_{xz}(\ell)$  como función del número de subláminas en la lámina  $[0_2]$  y  $[\pm 15]$ .

### 5.2.3. Campo de desplazamientos

A la izquierda de la Figura 5.30, se muestran las funciones elementales  $Z_i$  que resultan de la solución exacta al problema dado por la ecuación (4.63) para el laminado  $[0_2/90_4]_s$ . Se puede apreciar que la función  $Z_4$  es lineal, resultando ser una parte de la *componente* lineal total de la curvatura,  $\phi_x^o$ . El resto de componentes son perturbaciones que aparecen para producir las tensiones intralaminares necesarias que redistribuyen la pérdida de carga de la lámina fisurada en el resto del laminado. A la derecha de la Figura 5.30, se muestran los ángulos promediados perturbados  $\phi_t^i - \phi_x^o$  en cada lámina.

<i>Laminado</i>	<i>Interfaz</i>	$\delta$ [mm]	$\tau_{xz}$ [MPa]
$[0/\pm 15/90_2]_S$	$0/\pm 15$	1,393	0.011
	$\pm 15/90_2$	1,687	0.055
	$90_2/90_2$	1,724	0.1131
	$90_2/\pm 15$	0,7342	0.1564
	$\pm 15/0$	1,8468	0.022
$[0_2/90_4]_S$	$0_2/90_4$	0,517	0.0924
	$90_4/90_4$	0,5848	0.1608
	$90_2/0_2$	1,113	0.2468

Tabla 5.6: Longitud inefectiva  $\delta$  calculada a partir de las Figuras 5.23–5.24 para  $M_x = 1$ .

En la literatura, la longitud inefectiva  $\delta$  (distancia a la cual las tensiones de cortadura descienden hasta un 10 % de su máximo valor, (Rosen, 1964; Barbero and Kelly, 1993; Kelly and Barbero, 1993)) es normalmente asumida debido a la dificultad que supone calcularla, pero en este trabajo, como sucedía en el modelo anterior, puede ser calculada a partir de la solución exacta (4.64). Estas distancias  $\delta$ , se han calculado a partir de los resultados de las Figuras 5.23–5.24 y se muestran en la Tabla 5.6.

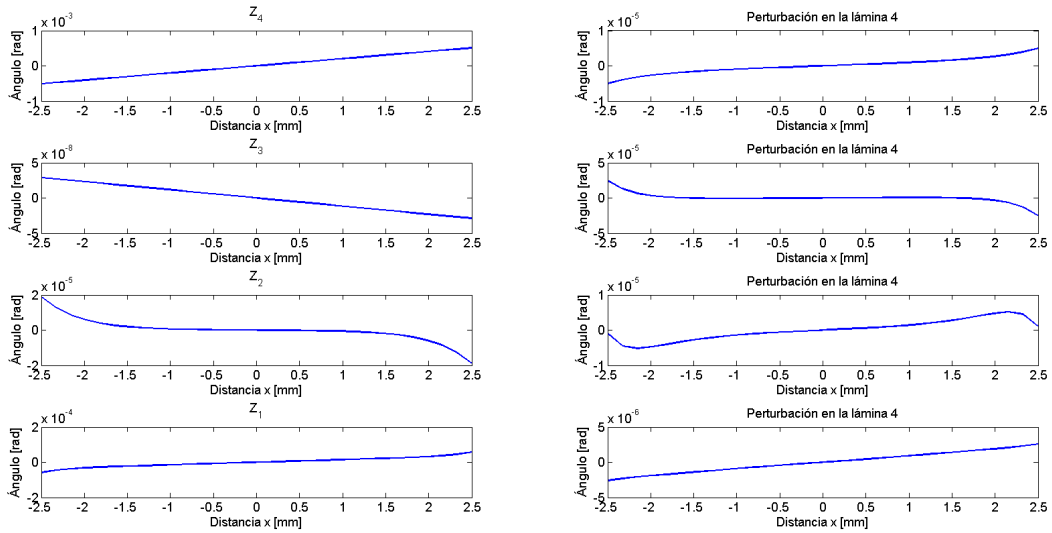


Figura 5.30: Izquierda: funciones elementales. Derecha: Ángulos promediados perturbados. Laminado  $[0_2/90_4]_S$  con una densidad de fisuras  $\lambda_k = 0,2[\text{mm}^{-1}]$ . La lámina fisurada es,  $k = 3$ , empezando desde abajo.

Como muestra la Tabla 5.6, la mayor tensión intralaminar y longitud inefectiva  $\delta$  ocurre en las interfaces cerca de la fisura (interfaz  $90_2/\pm 15$  para el laminado  $[0/\pm 15/90_2]_s$  e interfaz  $90_2/0_2$  para el laminado  $[0_2/90_4]_s$ ). Cualitativamente son de esperar estas tendencias, sin embargo, la presente metodología proporciona valores *cuantitativos*, que hasta ahora sólo se podía obtener a través de métodos numéricos como por ejemplo, el análisis por elementos finitos.

#### 5.2.4. Número de condición

El número de condición para la matriz de autovalores, se define como el ratio entre el máximo y el mínimo autovalor. Ordenando los autovalores en valor descendente, el número de condición del problema (4.60) es:  $C_n = \lambda_1/\lambda_n \gg 1$ , cuyos valores producen problemas numéricos que no favorecen la computación por ordenador. Por el contrario, el número de condición del problema (4.64) es:  $C_{n-1} = \lambda_1/\lambda_{n-1} \sim 10^1$  y por lo tanto, usando la ecuación (4.64) en vez de la ecuación (4.60), nos permitirá resolver el mismo problema pero con un número de condición  $C_{n-1} \simeq O(1)$ , el cual es mucho más favorable. En la Tabla 5.7 se muestra una comparación entre el número de condición original del problema (4.60) y el nuevo (4.64).

<i>Material</i>	<i>Laminado</i>	$C_n$	$C_{n-1}$	$\lambda_1$	$\lambda_{n-1}$	$\lambda_n$
C	$[0_2/90_4]_s$	$3,267e + 16$	54,830	-26.373	-0.4806	-8.074e-16
C	$[90_4/90_2]_s$	$132e + 16$	42,175	-52.382	-1.242	-3.988e-16
C	$[\pm 15/90_4]_s$	$9,290e + 16$	54,192	-28.9931	-0.535	-3.121e-16
C	$[\pm 30/90_4]_s$	$1,691e + 16$	53,740	-39.391	-0.733	-2.335e-15
C	$[\pm 40/90_4]_s$	$1,947e + 16$	54,775	-51.544	-0.941	-2.647e-15
G	$[0/90_3]_s$	$4,342e + 16$	54,034	-18.966	-0.351	-4.368e-16
G	$[0/90_3]_s$	$5,893e + 16$	3,746	-10.187	-2.719	-1.729e-15
C: IM6(Carbon)/Avimid-K			G: Fiberite(Glass)/HyE-9082A			

Tabla 5.7: Número de condición  $C$  y autovalores  $\lambda$ .





## Capítulo 6

### Conclusiones y trabajos futuros

En este último capítulo se van a exponer las conclusiones deducidas de los dos modelos que han sido desarrollados a lo largo de este proyecto fin de carrera, además de presentar, posteriormente, las posibles líneas de investigación futuras, en aras de seguir desarrollando y mejorando en este área. También, se presentan dos borradores científicos desarrollados con Ever.J Barbero, pendientes de publicación, en el anexo B.1 y B.2.

#### 6.1. Modelo analítico sometido a cargas membranales

La solución analítica, cerrada y exacta desarrollada para estas condiciones de carga sobre el laminado fisurado, no solo nos permite calcular la pérdida de rigidez axial sino que, además, posibilita identificar el origen del problema de convergencia cuando la solución es función de los desplazamientos totales, como se ha hecho hasta ahora en la literatura. En estos casos, es necesario representar una función lineal mediante un seno hiperbólico para poder representar la deformación homogénea en el resto del laminado, como resultaría en, la solución fundamental obtenida utilizando la teoría clásica de laminados (CLT). El resto de valores propios (de un orden de magnitud unidad), representan las perturbaciones que se producen debido a la formación de las fisuras, obteniendo así los esfuerzos cortantes interlaminares necesarios para redistribuir la pérdida de carga en el resto del laminado. La solución dada por la ecuación (3.63) de este documento, resuelve este problema y, por otro lado, nos permite calcular las tensiones de corte interlaminares en todas las interfaces, tanto en la dirección  $x$  como a lo largo del espesor  $z$ .

Además, mediante la formulación propuesta, se puede subdividir las láminas no dañadas en subláminas individuales de menor espesor para aumentar la precisión en el cálculo de las tensiones interlaminares. De los resultados obtenidos, se pudo observar como dichas tensiones convergen con el número de subláminas y, por tanto, confirma que el hecho de suponer una

distribución lineal de tensiones intralaminas hace perder precisión en el proceso de cálculo; es decir, que existen funciones impares de mayor orden que se aproximan a la solución final con mayor exactitud. Este último aspecto, es de gran importancia a la hora de predecir una posible deslaminación en el laminado.

Finalmente, puede calcularse de manera exacta la longitud inefectiva en cada una de las interfaces para la cual dejan de existir tensiones interlaminas o, lo que es lo mismo, la distancia a la cual la lámina deja de soportar la misma carga que en CLT (representación lineal mediante un  $\sinh$ ). Además, los resultados calculados mediante este modelo en condiciones de membrana, también sirven como puntos de referencia para otras soluciones aproximadas y/o numéricas.

## 6.2. Modelo analítico sometido a flexión pura

La solución analítica, exacta y cerrada presentada en este modelo, permite resolver el problema de la pérdida de rigidez a flexión de forma distinta a como se ha calculado hasta ahora, ya que los demás modelos, que se encuentran en la literatura, o bien son principalmente numéricos (estudio previo por elementos finitos) o son soluciones analíticas exactas no cerradas en forma de serie para algún caso de deformación plana generalizada. La solución que se presenta en este proyecto, también aproximada mediante el uso de los desplazamientos promediados en cada lámina, tiene de nuevo una correlación entre la curvatura final del laminado y la curvatura fundamental predicha aplicando la teoría clásica de laminados para el caso libre de daño ( $\phi_x^o$ ), como sucedía en el modelo anterior. La solución (4.66) presentada, elimina el problema de mal condicionamiento del sistema de ecuaciones algebraicas, mientras que el resto de modelos en la literatura, aducen este tipo de problemas al formular la solución final en función de los desplazamientos totales y no hacer diferencia entre las perturbaciones producidas por la formación de fisuras y la solución lineal dada por la CLT.

La formulación presentada en este modelo, nos permite subdividir de nuevo las láminas no dañadas en subláminas de menor espesor ( $0^\circ$ ,  $90^\circ$  sometidas a compresión y grupos  $\pm\theta$ ) para proporcionar una mayor exactitud en el resultado de las tensiones intralaminas, tanto a lo largo de la lámina como a través del espesor, siendo este aspecto fundamental para predecir la deslaminación en el laminado. De esta manera, se confirma que existen funciones impares de mayor orden que se aproximan más a la solución final al converger con el número de subláminas.

También, somos capaces de resolver de manera exacta en este proyecto la longitud inefectiva

en cada una de las intercaras para la cual la lámina deja de soportar carga ( solución fundamental, CLT), y las soluciones planteadas sirven de nuevo como puntos de referencia para la obtención de soluciones aproximadas o numéricas, aún para un estado de tensión plana.

Por último, los resultados arrojados para este modelo (pérdida de rigidez), muestran tendencias esperadas como, por ejemplo, que la pérdida de rigidez a flexión en laminados con las láminas fisuradas en el exterior sea mucho mayor que cuando éstas se encuentran cerca de la superficie media, y este hecho, se debe a la diferencia de rigidez entre láminas y a la distancia a la fibra neutra. Además de las tendencias esperadas, se deduce una información cuantitativa muy útil a la hora de hacer ensayos de diseño. Resulta evidente, que en algunas configuraciones del laminado con una pérdida de rigidez esperada de sólo un 4 % (láminas fisuradas cerca de la superficie media del laminado), no sería útil medirla en un entorno experimental ya que la pérdida de rigidez sería del mismo orden de magnitud que la incertidumbre proporcionada por la instrumentación, mientras que en las otras configuraciones, usando los mismos materiales y con un mismo espesor, la pérdida de rigidez es mucho mayor y, por lo tanto, la instrumentación sí sería capaz de cuantificar este daño.

### 6.3. Trabajos futuros

A fin de avanzar y mejorar en la predicción de la fisuración intralaminar en laminados de matriz polimérica, se plantean a continuación posibles líneas en las que se puede seguir trabajando:

- I. Desarrollar un modelo analítico que incorpore solicitaciones conjuntas al laminado tanto de tipo de membrana como cargas a flexión.
- II. Desarrollar un modelo capaz de obtener la matriz de rigidez completa de un laminado para cualquier tipo de configuración.
- III. Implementar dichos modelos para ser analizados por elementos finitos e incorporar la última etapa de daño correspondiente al inicio y evolución de las fisuras.
- IV. Plantear si compensa computacionalmente, considerar otro tipo de distribuciones de tensiones intralaminares de mayor orden, comparándolo con la aproximación aquí presentada (subdividir en subláminas).



# Bibliografía

- Adolfsson, E., Gudmundson, P., 1997. Thermoelastic properties in combined bending and extension of thin composite laminates with transverse matrix cracks. *International Journal of Solids and Structures* 34 (16), 2035–2060.
- Adolfsson, E., Gudmundson, P., 1999. Matrix crack initiation and progression in composite laminates subjected to bending and extension. *International Journal of Solids and Structures* 36 (21), 3131–3169.
- Adumitroaie, A., Barbero, E. J., 2014. Intralaminar damage model for laminates subjected to membrane and flexural deformations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* Accepted 01/22/2013. <http://barbero.cadec-online.com/papers/2014/10.1080/15376494.2013.796541.pdf>.
- Anderson, T. L., 1995. *Fracture Mechanics*, boca ralon Edition. CRC.
- Barbero, E. J., 2008. *Finite Element Analysis of Composite Materials*, 1st Edition. Taylor & Francis, <http://barbero.cadec-online.com/feacm>.
- Barbero, E. J., 2011. *Introduction to Composite Materials Design*, 2nd Edition. CRC Press, Philadelphia, PA.
- Barbero, E. J., 2013. *Finite Element Analysis of Composite Materials Using Abaqus*. CRC Press, <http://barbero.cadec-online.com/feacm-abaqus>.
- Barbero, E. J., Cortes, D. H., 2010. A mechanistic model for transverse damage initiation, evolution, and stiffness reduction in laminated composites. *Composites Part B* 41, 124–132.
- Barbero, E. J., Cosso, F. A., 2013. Benchmark solution for degradation of elastic properties due to transverse matrix cracking in laminated composites. *Composite Structures* 98, 242–252.
- Barbero, E. J., Cosso, F. A., 2014. Determination of material parameters for discrete damage mechanics analysis of carbon-epoxy laminates. *Composites Part B* 56, 638–646.

- Barbero, E. J., DeVivo, L., 2001. Constitutive model for elastic damage in fiber-reinforced pmc laminae. *International Journal of Damage Mechanics* 10 (1), 73–93.
- Barbero, E. J., Kelly, K. W., 1993. Predicting high temperature ultimate strength of continuous fiber metal matrix composites. *Journal of Composite Materials* 27 (12), 1214–1235.
- Barbero, E. J., G. F., Lonetti, P., 2005. Continuum damage-healing mechanics with application to self-healing composites. *International Journal of Damage Mechanics* 14 (1), 51–81.
- Camanho, P. P., Davila, C. G., 2002. Mixed-mode decohesion finite elements for the simulation of delamination in composite materials. NASA/TM-2002-211737, 1–37.
- Cortes, D. H., Barbero, E. J., 2010. Stiffness reduction and fracture evolution of oblique matrix cracks in composite laminates. *Annals of Solid and Structural Mechanics* 1 (1), 29–40.  
URL <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-78651582114&partnerID=40&md5=faaaecce39e98eba4b115c09847e8a5c>
- Davila, C. G., 2013. Modeling fracture and complex crack networks in laminated composites. In: Mantic, V. (Ed.), *Mathematical Methods and Models in Composites. Computational and Experimental Methods in Structures*. Imperial College Press.  
URL <http://books.google.com/books?id=MR-auAAACAAJ>
- E. J. Barbero, F. A. C., Martinez, X., 2013. Identification of fracture toughness for discrete damage mechanics analysis of glass-epoxy laminates. *Applied Composite Materials* November, 1–18.
- E. J. Barbero, F. A. Cosso, R. R., Weadon, T. L., 2013. Determination of material parameters for Abaqus progressive damage analysis of E-Glass Epoxy laminates. *Composites Part B* 46, 211–220.  
URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.09.069>
- F. Rastellini, S. Oller, O. S., Oñate, E., 2008. Composite materials non-linear modelling for long fibre-reinforced laminates: Continuum basis, computational aspects and validations. *Computers and Structures* 86(9), 879–896.
- G. J. Dvorak, N. L., Hejazi, M., 1985. Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates i. thermoelastic properties of a ply with cracks. *Journal of Composite Materials* 19 (3), 216–234.  
URL <http://jcm.sagepub.com/content/19/3/216.abstract>

- J. Varna, R. Joffe, N. A., Talreja, R., 1999. Damage in composite laminates with off-axis plies. *Composites Science and Technology* 59, 2139–2147.
- J. Varna, R. J., Talreja, R., 2001. A synergistic damage mechanics analysis of transverse cracking in  $[\pm\theta/90_4]_s$  laminates. *Composites Science and Technology* 61, 657–665.
- J. Aveston, Cooper, G. A., Kelly, A., 1971. *Properties of Fiber Composites*. Surrey, National Physical Laboratory, UK.
- Kelly, K. W., Barbero, E. J., 1993. Effect of fiber damage on the longitudinal creep of a cfmmc. *International Journal of Solids and Structures* 30 (24), 3417–3429.
- Liu, S., Nairn, J. A., 1992. Formation and propagation of matrix microcracks in cross-ply laminates. *J Reinf Plas Compos*, 158–178.
- M. M. Moure, S. Sanchez-Saez, E. B., Barbero, E. J., 2014. Analysis of damage localization in composite laminates using a discrete damage model. *Composites Part B* 66, 224–232.
- Mayugo, J. A., P. P. Camanho, P. M., Davila, C. G., 2010. Analytical modelling of transverse matrix cracking  $[\pm\theta/90_n]_s$  of composite laminates under multiaxial loading. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 17(4), 237–245.
- McCartney, L. N., 2005a. Energy-based prediction of failure in general symmetric laminates. *Engineering Fracture Mechanics* 72, 909–930.
- McCartney, L. N., 2005b. Energy-based prediction of progressive ply cracking and strength of general symmetric laminates using an homogenisation. *Method, Composites Part A* 36, 119–128.
- Nairn, J., 2000. Matrix microcracking in composites. In: Talreja, R., Manson, J. A. E. (Eds.), *Polymer Matrix Composites*. Vol. 2 of *Comprehensive Composite Materials*. Elsevier, Amsterdam, pp. 403–432.
- Nairn, J., Hu, S., 2004. Matrix microcracking. In: Talreja, R. (Ed.), *Damage Mechanics of Composites Materials*. Elsevier, pp. 187–243.
- Nuismer, R. J., Tan, S. C., 1988. Constitutive relations of a cracked composite lamina. *Journal of Composite Materials* 22, 306–321.
- P. Ladevèze, O. Allix, J. D., Lévêque, D., 2000. A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 183(1-2), 105–122.

- P. Lonetti, R. Zinno, F. G., Barbero, E. J., 2003. Interlaminar damage model for polymer matrix composites. *Journal of Composite Materials* 37 (16), 1485–1504.
- Pagano, J., Piper, D. R., 1970. Intralaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension. *Composite Material* 4, 538–546.
- Rosen, B. W., Nov. 1964. Tensile failure of fibrous composites. *AIAA Journal* 2 (11), 1985–1991. URL <http://dx.doi.org/10.2514/3.2699>
- S. Li, S. R. R., Soden, P. D., 1993 1993. Modelling the damage due to transverse matrix cracking in fiber-reinforced laminates. In: *Proc. 2nd Int. Conf. on Nonlinear Mechanics (ICNP-2)*. Peking University Press, pp. 320–323.
- S. Li, S. R. R., Soden, P. D., 10 1994. A finite strip analysis of cracked laminates. *Mechanics of Materials* 18 (4), 289–311.
- S. Li, S. R. R., Soden, P. D., 10/15 1998. A continuum damage model for transverse matrix cracking in laminated fibre-reinforced composites. *Philosophical Transactions of the Royal Society London, Series A (Mathematical, Physical and Engineering Sciences)* 356 (1746), 2379–412.
- Smith, P. A., Ogin, S. L., 1999. On transverse matrix cracking in cross-ply laminates loaded in simple bending. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 30 (8), 1003–1008.
- Smith, P. A., Ogin, S. L., 11/08 2000. Characterization and modelling of matrix cracking in a (0/90)<sub>2s</sub> gfrp laminate loaded in flexure. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A (Mathematical, Physical and Engineering Sciences)* 456 (2003), 2755–70.
- Sun, C., 1998. *Mechanics of Aircraft Structures*. Wiley.
- T. Yokozeki, T. A., Ishikawa, T., 05 2005. Consecutive matrix cracking in contiguous plies of composite laminates. *International Journal of Solids and Structures* 42 (9-10), 2785–2802.
- Talreja, R., 1994. Damage characterization by internal variables. In: Talreja, R., Manson, J. A. E. (Eds.), *Damage Mechanics of Composite Materials*. Elsevier Science, Amsterdam, pp. 53–78.
- Talreja, R., Singh, C., 2012. *Damage and Failure of Composite Materials*. Cambridge University Press.
- Tan, S. C., Nuismer, R. J., 1989. A theory for progressive matrix cracking in composite laminates. *Journal of Composite Materials* 23, 1029–1047.



- X. Martinez, F. Rastellini, S. O. F. F., nate, E. O., 2011. Computationally optimized formulation for the simulation of composite materials and delamination failures. *Composites Part B* 42(2), 134–144.
- Yokozeki, T., Aoki, T., 2004. Stress analysis of symmetric laminates with obliquely-crossed matrix cracks. *Advanced Composite Materials* 13 (2), 121–40.